UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00477796 7

Die

Zahlenrechnung

in

ihren reinen Elementen dargestellt und auf die verschiedenen Forderungen der praktischen Geometrie und des kommerziellen Lebens angewendet.

Ein

arithmetisches Handbuch

für

Schule und Haus,

entworfen und bearbeitet

von

Fr. Hausch,

Königlich Württembergischem Oberlieutenant a. D., vormaligem Trigonometer der württembergischen Landesvermessung.

Leipzig und Stuttgart,

J. Scheible's Verlags-Expedition.

1835.

LIBRARY
MAR 25 1976
UNIVERSITY OF TORONTO

Gedr. b. d. Gebr. Mäntler.

Die

Zahlenrechnung.

Der deutschen Jugend gewidmet.

Vorrede.

Die verschiedenen Gelegenheiten, welche sich mir durch Berufung zu geodätischen Arbeiten darboten, über das Gebäude der Größenlehre nachzuforschen und dessen Fundament zu ergründen, haben mich zu der Ueberzeugung geführt, daß die ungeheure Wissenschaft der Mathematik noch der klaren Entwicklung ihrer Elemente entbehrt. Unstreitig beruhen die Postulate der großen Logik auf Zahlen, welches sind die Namenausdrücke für die verschiedenartigen Vermehrungen eines Begriffs; ebenso gewiß sind die Zahlen das A B C der Sprache für unsere politischen, materiellen und moralischen Interessen. Nur durch Zahlen erfahren wir Wahrheit, nur in der

Zahl erhebt sich die Brust des Mannes zum edlen Selbstgefühl und schöpft aus ihr Zuversicht, daß der erhabene Zweck der Menschheit seinem Ziele immer näher gerückt werde.

So zahlreich auch die Werke sind, welche sich mit der Erklärung von Größen und den Gesetzen ihrer möglichen Veränderungen befassen, so sind dieselben gewöhnlich nicht im Stande, volksthümlich zu werden und den allgemeinen Nutzen zu verbreiten, den sie haben sollten; denn entweder sind sie von Männern entworfen, die in abstrakten Regionen spekuliren und denen die Gegenstände des gesellschaftlichen Verbandes fremd geworden sind, oder sie wurden von mathematischen Gauklern gemacht, welche die erhabene Wissenschaft in den geheimnißvollen Mantel der Wunder einhüllen, und ihren geduldigen Lesern mechanisch erlernte Experimente auftischen. Bei diesen Umständen kann es nicht fehlen, daß der nächste Weg zum Ziele in den Schulen unangebahnt bleibt und sich der Jüngling bei seinem Eintritte in das öffentliche Leben, welches ihm Brod schaffen soll, der Bürde entledigt, deren Zweckmäßigkeit und Verwendung ihm nicht begreiflich gemacht werden konnte.

Wenn dem nicht so wäre, wie ließe sich sonst die große Unwissenheit in der Mathematik von Männern erklären, die an der Spitze von Geschäften stehen, zu deren zweckmäßiger Leitung die Kenntniß derselben unumgänglich nöthig ist? Ist es aber nicht zu bedauern, wenn durch solche Leitungen, Arbeiten, die zum Wohle eines Staates unternommen seyn sollen, blos zu seinem Nachtheile ausfallen müssen, indem das Gelingen Zufall, die Kosten aber gewiß sind? Beispiele über diese Erfahrungen ließen sich genug aufstellen. Zwar muß ich redlich bekennen, daß die Regieen endlich das Bedürfniß gefühlt haben, dem ernsteren und nützlichern Studium der technischen Wissenschaften, die nur auf Größenlehre beruhen, durch Errichtung von Gewerbe- oder Realschulen Vorschub zu leisten; aber noch möchte lange kein Erfolg von ihnen zu erwarten seyn, so lange nicht in den ersten Klassen die Zahlenprobleme ausschließlich den Vortrag bilden und zwar in einem Systeme, das sowohl der Fassungskraft der Schüler, als auch der gründlichen Wissenschaft angemessen ist. Zu diesem Ende sehe ich die gewöhnliche Zahlenrechnung als Grundlage

an, ſie muß der Geometrie vorausgehen, weil ſolche ja wieder nichts anderes als ein verändertes Zahlenſyſtem iſt. — Um nun das Meinige dazu beizutragen, was mir nach reiferem Nachdenken als Unterſtützung dieſer großen Angelegenheit erſcheint, und deſſen Zweckmäßigkeit ich durch praktiſche Erfahrungen erprobt habe, entſchloß ich mich zu dem Entwurfe gegenwärtiger Abhandlung. Möge ſolche in dem guten Sinne aufgenommen werden, daß ich nicht glaube, Alles gethan zu haben, ſondern daß ich thun wollte, was mir möglich iſt, und das ich als nützlich für Förderung der Wahrheit und ſomit der Geſittung erachtet. Möchte ſie die Urſache werden, die Aufmerkſamkeit eines genialen Ergründers dieſer Materie zu erwecken, und dadurch wenigſtens mittelbaren Nutzen geſtiftet zu haben.

Ueber die Anlage und Ausführung der unternommenen Arbeit ſey noch ſo viel geſagt, als nothwendig iſt, um nicht mißverſtanden zu werden.

Meine Hauptabſicht hiebei war:

1) auf wenige Vorausſetzungen gegründet, welche den Anfänger nur abſchrecken, in einem ſtufenweiſen Gange

die Verbindungen und Veränderungen der Zahlgrößen abzuhandeln;

2) die Form der Werthe und deren Entwicklungen so zu wählen, daß der Uebergang in die Algebra erleichtert wird;

3) hauptsächlich durch Anwendung von Beispielen und durch deren Beleuchtung von so vielen Seiten, als sie von dem Anfänger gefaßt werden können, ein Selbstdenken zu erwecken, welches unumgänglich nöthig zum beliebigen Gebrauche der gegebenen Sätze ist, da nie für jeden Fall ein Exempel aufgestellt werden kann;

4) eine weitläufige Terminologie zu vermeiden, weil solche erst bei weiterem Vorschreiten in den Zahlensystemen Interesse erhält, und früher nur Verwirrung und Ungeduld erregen könnte;

5) für die Beispiele solche Fälle anzuwenden, welche sowohl für's praktische Leben, als für die Wissenschaften, Bedeutung haben.

6) Die vielen Abtheilungen und Citaten zu vermeiden, aber solche durch ein ausführliches Register zu er-

setzen; weil dieselben den Vortrag nur unterbrechen, letzteres jedoch vollkommen dazu dient, wenn es darum zu thun ist, frühere Sätze nachzuschlagen;

7) die Abhandlung nur bis zur Anwendung der geometrischen Verhältnisse auszudehnen, weil man eigentlich mit diesen die Hauptlehren der Arithmetik als geschlossen betrachten kann. Die höheren Rechnungen sind nur künstliche Zusammensetzungen der gegebenen Vordersätze;

8) gründliche Maaßtabellen zu geben, welche die einfachste Einrichtung haben.

Diesen Punkten, welche ich zu erreichen strebte, und wie weit es mir gelungen, dem wohlwollenden Urtheile des verehrlichen Publikums überlasse, habe ich noch beizufügen, daß die Sprache des Textes keinen Anspruch auf zierlichen Styl machen, sondern nur als nothwendige Einleiterin und Führerin des Zahlenmechanismus angesehen seyn will.

Auf die Uebungen des Kopfrechnens habe ich nicht besonders hinarbeiten wollen und zwar deßwegen, weil

ſie doch nicht weit führen und es Jedem überlaſſen bleibt, der ſich für dieſelben intereſſirt, ſie aus dem Gegebenen ſelbſt zu entwickeln; denn ſie ſetzen ja nur Kenntniß der Zahlverhältniſſe voraus.

Einige Erklärungen, die früher noch nicht gegeben werden konnten, habe ich in Zuſätzen nachgeſchickt, damit das Gerippe des Vortrags einigermaaßen ausgefüllt wird. Daß ich von Gerippe ſpreche, wird man mir nicht zur Laſt legen können, indem ich die Ueberzeugung habe, daß man die Materie der Arithmetik in einem ſo beengten Raume nie vollſtändig zu erſchöpfen im Stande iſt, auch es zweckmäßiger ſeyn wird, mit dem Schüler an einem ſichern Leitfaden bis zu einem gewiſſen Punkte mit mehr Raſchheit, als es der Stoff erlauben ſollte, voranzuſchreiten, um ihm einen Vorgeſchmack beizubringen, zu welchen Erwartungen er bei eigenem gründlichen Studium berechtigt iſt. Der gleiche Umſtand wird ihm auch Gelegenheit geben, manches Lückenhafte durch ſeine eigene Beurtheilungskraft als lohnende Mühe ergänzen zu können.

Sollte dieſer Verſuch keine ungünſtige Aufnahme

finden, so wäre ich geneigt, als Fortsetzung die verschiedenen Verbindungen der entwickelten Rechnungsarten und deren Anwendung auf die anderweitigen Interessen des Lebens in der gleichen einfachen Weise, wie Gegenwärtiges, zu geben und die Einleitung in die Algebra bis zu dem Binomium zu entwerfen.

Stuttgart, im Monat Mai 1835.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

		Seite.
§. 1.	Erklärung der Rechenkunst	1
= 2.	= der Zahl	1
= 3.	= = Einheit	1
= 4.	= = Zahlnamen	1
= 5.	= = Ziffern	2
= 6.	= = Null	3
= 7.	Bezeichnung des einfachen Zehners	4
= 8.	= der vielfachen Zehner	4
= 9—13.	Zehner mit Einheiten verbunden	5—7
= 14—15.	Hunderter, Tausender, Zehntausender ꝛc.	7—8
= 16.	Numerir-Schema	9—10
= 17.	Milliarde, Dutzend, Paar, gerade, ungerade	10

Uebersicht der Rechnungsarten.

§. 19.	Erklärung	11
= 20.	Ganze Zahlen	12
= 21.	Arithmetische Zeichen	12

Unbenannte Zahlen zu addiren.

§. 22.	Erklärung	12
= 23—30.	Beispiele und Lehren	12—18

Unbenannte Zahlen zu multipliciren.

		Seite.
§. 31—36.	Erklärungen	19—22
= 37—39	Ausführungen	22—26

Unbenannte Zahlen zu subtrahiren.

§. 40—46.	Erklärung und Ausführung	26—30
= 46—47.	Decadische Ergänzung	30—32
= 48.	Beispiele	32

Unbenannte Zahlen zu dividiren.

§. 49—50.	Erklärung	32—33
= 51—60.	Ausführung	33—41

Von den Merkmalen der Divisoren.

§. 61.	1) Zahlen durch 2 theilbar	42
= =	2) = = 10 u. 5 theilbar	42
= =	3) = = 5 theilbar	42
= =	4) = = 100, 10, 5, 20 ꝛc. theilb. . .	42
= =	5) = = 1000 ꝛc. theilb.	42
= =	6) = = 9 theilbar	43
= =	7) = = 3 = ...	43
= =	8) = = 11 = 1ter Fall	43
= =	9) = = 11 = 2ter = ...	44
= =	10) = = 11 = 3ter = ...	44
= =	11) = = 4 theilbar 1ter Fall . . .	45
= =	12) = = 4 = 2ter Fall . . .	45
= =	13) = = 7 = ...	45

Rechnungsproben.

§. 62.	a) für's Addiren	46
= 62.	b) = Multipliciren	47
= 62.	a) = Subtrahiren	47
= 62.	b) = Dividiren	47—48

Von den Theilern der Zahlen.

§. 63.	Zusammengesetzte Zahlen, Primzahlen, größtes gemeinschaftliches Maaß	48—49

Seite.

§. 64. 1) Jede Zahl besteht aus Primzahlen 49
= = 2) Maaß zwischen dem Faktor und Produkt . . 50
= = 3) = = der Summe und den Summanden 50
= = 4) = = der Summe und einem Summanden 51
= = 5) Größtes gemeinschaftliches Maaß 1ter Fall . . 51
= = 6) = = = 2ter = . . 51
= = 7) = = = 3ter = . . 52
= = 8) = = = 4ter = = . 52
= 65. Das größte gemeinsch. Maaß zweier Zahlen zu finden 53
= 66. = = = = mehrerer = = = 55

Die durch andere kleinste ausmeßbare Zahl.

§. 67. 1) Sind die gegebenen Zahlen zusammengesetzt . 56
= 67 2) = = = = Primzahlen unter sich 57
= 68 3) Die kleinste ausmeßbare Zahl zu finden . . 58

Von den Brüchen oder gebrochenen Zahlen.

§. 69—72. Erklärungen 59
= 73. Benennung der Brüche und ihrer Theile . . 61
= 74. Werth der Brüche 62
= 75—76. Vermehrung und Verminderung des Werths der Brüche 62
= 77—78. Ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt . 65

Gewöhnliche Brüche zu addiren.

§. 79. Bei gleicher Benennung die Summe der Zähler . 66
= 80. Wenn der Zähler größer als der Nenner wird . 67
= 81. Aus einer gemischten Zahl den uneigentl. Bruch . 67
= 82—87. Auf gleiche Benennung zu bringen . . . 68
= 88. Zähler und Nenner verkleinern, Kettenbrüche . 75

Gewöhnliche Brüche zu multipliciren.

§. 89. Erklärung 78
= 90. Zwei Brüche zu multipliciren 79
= 91. Vergleichung der Multiplication mit Brüchen und der mit ganzen Zahlen 79
= 92. Weitere Erklärung 81

Seite.

§. 93—95. Regeln für die Multiplic. mit Brüchen . . 82
= 96. Beispiele über die Multiplication derselben . . 83

Gewöhnliche Brüche zu subtrahiren.

§. 97. 1) Zwei Brüche von gleicher Benennung . . . 83
= 97. 2) = = = ungleicher Benennung . . 84
= 97. 3) Differenz zweier Bruchsummen 84

Gewöhnliche Brüche zu dividiren.

§. 98. 1) Eine ganze Zahl mit einem Bruche . . . 85
= = 2) Ein Bruch mit einer ganzen Zahl . . . 86
= = 3) Ein Bruch durch einen andern 86
= 99—101. Allgemeine Regeln für die Division mit Brüchen 87
= 102. Andere Erklärungsart 89
= 103. Beispiele über die Division der Brüche . . . 90

Die Gleichungen.

§. 104—105. Allgemeine Betrachtungen 92
= 106. Erklärungen 93
= 107. Grundsätze 94
= 108. Die Unbekannte x 94
= 109—118. Aufgaben und deren Auflösungen . . . 95
Allgemeine Regel zur Auflösung 99

Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

§. 119—120. Allgemeine Erklärungen. 104
= 121. Summe der äußern und mittlern Glieder . . 105
= 122. Das 4te Glied einer arithm. Proportion zu finden. 106
= 123—124. Stetige arithmetische Proportionen . . 107
= 125. Die mittlere arithmetische Proportionale zu finden 107
= 126—127. Verwechslungen der Glieder 108
= 128. Arithmetisches Mittel durch Figur 110
= 129. Durchschnittszahl 111
= 130. Summe und Differenz zweier Zahlen . . . 112

Von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

§. 119 u. 131—133. Allgemeine Erklärungen . . . 113
= 134. Produkte der mittlern und äußern Glieder . . 115

Seite.

§. 135. Das 4te Glied einer geom. Proportion zu finden . 116
= 136. Zwei Glieder und der Exponent gegeben . . 116
= 137. Mittlere geometrische Proportionale . . . 117
= 138. Aus zwei gleichen Produkten die Proportion . . 118
= 139. Verwechslung der Glieder 120
= 140–141. Aufgaben, aus Produkten die Prop. zu bilden 122
= 142. Das 1te Glied zur Summe des 1ten und 2ten ꝛc. . 123
= 143. Die Summe des 1ten u. 2ten Gliedes zum zweiten ꝛc. 125
= 144. Das 1te Glied zur Differenz des 2ten u. 1ten ꝛc. . 126
= = Das 2te = = = = = = ꝛc. . 126
= 145. Das 1te und 2te Glied mit einerlei Zahl multipl. . 127
= = Das 3te und 4te = = = = = . 128
= = Das 2te und 4te = = = = = . 128
= = Das 1te und 3te = = = = = . 128
= 146. Die 4 Glieder mit einerlei Zahl multiplicirt . . 128
= 147. Das 1te und 2te Glied mit einerlei Zahl dividirt . 129
= = Das 3te und 4te = = = = = . 130
= = Das 2te und 4te = = = = = . 130
= 147. Sämmtliche Glieder mit einerlei Zahl dividirt . 130
= 148. Die Produkte der ersten Glieder zu den Produkten ꝛc. 130
= 149. Das erste Glied der ersten Proportion zum zweiten der zweiten ꝛc. 131
= 150. Zusammenhängende Verhältnisse 132
= 151. Jedes Verhältniß ein Bruch 135

Von den Dezimalbrüchen.

§. 152–155. Allgemeine Erklärungen 135

Dezimalbrüche zu addiren.

§. 156. Beispiele hierüber 138

Dezimalbrüche zu multipliciren.

§. 157. Erklärung 139
= 158. Allgemeine Regeln 140
= 159. Beispiele 141

Dezimalbrüche zu subtrahiren.

		Seite.
§. 160.	Ausführung	143
= 161.	Beispiele	144

Dezimalbrüche zu dividiren.

§. 162.	Ausführung	144
= 163.	Beispiele	146
= 164.	Einen gewöhnlichen Bruch in einen Dezimalbruch	147
= 165.	Auf einem andern Wege	148
= 166.	Periodischer Dezimalbruch	149
= 167.	Einen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch	150
= 168.	Einen periodischen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen	151

Von den benannten Zahlen.

§. 169.	Allgemeine Betrachtung	154
= 169.	Bezeichnungen	157
= 169.	Württembergische Maaßeintheilungen	158

Benannte Zahlen zu addiren.

§. 170.	1) Geldwerthe	160
= =	2) Gewichte	161
= =	3) Weinmaaße	162
= =	4) Fruchtmaaße	162
= 171.	Die Ruthe 16schuhig und der Fuß 12theilig	163
= =	Die Ruthe 10schuhig und der Fuß 10theilig	164
= =	Beschreibung der Dezimalmaaße	165
= =	Beispiele im Dezimallängenmaaße	165
= 172.	Beispiele im Duodezlängenmaaße	166
= 173.	Erklärung der Flächenmaaße	167
= 173.	Württembergisches altes Flächenmaaß	169
= 175.	= neues	170

Beispiele über Addition von Flächenmaaßen.

Seite.

§. 174. 1) Wenn die Ruthe 16schuh. und der Fuß 12theilig 170
= = 2) = = = 10schuh. und der Fuß 12theilig 170
= = 3) = = = 10schuh. und der Fuß 10theilig 171
= = Kürzeste Beschreibung des Dez.Läng.M. . . . 172
= 175. Eintheilung des württb. Morgen 173
= 175. Die Quadrat-Klafter 174
= 176. Erklärung des Körpermaaßes 174
= = Zwölftheiliges Körpermaaß 176
= = Dezimal-Körpermaaß 176
= 177. Duodezkubikmaaße zu addiren 176
= = Dezimalkubikmaaße zu addiren 177
= 178. Von der Zeit 179
Erstes Zeitbeispiel für's Addiren 180
Zweites Zeitbeispiel für's Addiren 180
Drittes Zeitbeispiel = = ... 182
= 179. Winkel zu addiren 183
= 180. Papiermaaß, Kohlenmaaß, Strohmaaß ꝛc. . . 184

Benannte Zahlen zu multipliciren.

§. 181. 1) Beispiel im bairischen Längenmaaß . . . 186
= = 2) = = = Flächenmaaß . . . 188
= = 3) = = = Fruchtmaaß . . . 189
= = 4) = = = Gewichte 190
= = 5) = = = Flüssigkeitsmaaß . . 190
= 182. Vermehrung eines Maaßes durch ein anderes . 191
= 184. Aufnahmsblatt der württb. Landesvermessung . 201
= 184. Werthe der württb. Morgentheile in 16schuhigen Quadratruthen 202
= = Die Klafterzahl einer Holzschichte zu finden . . 202
= = Aus zwei Dimensionen den Flächeninhalt zu finden 202
= = Die Anzahl der Eimer u. s. w. für einen Raum zu finden 204
= = Die Anzahl der Scheffel u. s. w. auf einem Speicher zu finden 206

Seite.

§. 185. Duodezimalbrüche 208
§. 186. Serageſimalbrüche 211

Benannte Zahlen zu ſubtrahiren.

§. 187. 1) Beiſpiel im badiſchen Längenmaaße . . . 212
§. 187. 2) Beiſpiel im Gewichte 213
§. 187. 3) Beiſpiel im Getraidemaaß . . 213
§. 187. 4) Beiſpiel mit Längenmaaßen, die Ruthe 10ſchuhig 214
§. 187. 5) Beiſpiel über den Zeitunterſchied . . . 215
§. 187. 6) Beiſpiel über den Unterſchied zweier Winkel . 215
§. 187. 7) Beiſpiel im preußiſchen Flüſſigkeits-Maaße . . 216
§. 187. 8) Beiſpiel im Flächenmaaße 217
§. 187. 9) Beiſpiel im Körpermaaße 218
§. 187. 10) Beiſpiel in preußiſchem Gelde 218
§. 187. 11) Beiſpiel im Zwanzig-Guldenfuß . . . 218
§. 187. 12) Beiſp. in Schweizer-Francs 219

Benannte Zahlen zu dividiren.

§. 188. 1) Beiſpiel im 24 Guldenfuß 219
§. 188. 2) " im Gewicht 220
§. 188. 3) " im Längenmaaße 221
§. 188. 4) " im Flächenmaaße 222
§. 188. 5) " im Körpermaaße 223
§. 188. 6) " im Decimallängenmaaß 225
§. 188. 7) " im württb. Flächenmaaß . . . 225
§. 188. 8) " in kubiſchen Klaftern 226
§. 188. 9) Ein Flächenmaaß durch ein Längenmaaß . . 227
§. 188. 10) Aus Flächeninhalt die Höhe der Grundlinie . 230
§. 188. 11) Aus Flächeninhalt und Grundlinie die Höhe . 232
§. 188. 12) Das Nämliche in Dezimalmaaßen . . . 233
§. 188. 13) Einen kubiſchen Gehalt durch Längenmaaß . 233
§. 188. 14) Einen kubiſchen Gehalt durch Flächenmaaß . 236

Weitere Ausführung in benannten Zahlen.

Seite.

§. 189. Flächenruthen, Flächenfuße ꝛc. 238
§ 190. Benannte Zahlen mit Brüchen zu addiren . . 240
§ § § § § § zu subtrahiren . 241
§ 191. § § § § zu multipliciren . 241
§ § Verwechslung der Faktoren 244
§ § Zerlegung eines Faktors 244
§ § Einschäzung bei der württembergischen Landesvermessung 246
§ 192. Eine benannte Zahl mit einem Bruche zu multipliciren 249
§ § Desgleichen mittelst Dezimalbrüchen 250
§ 193. Benannte Zahlen mit Duodezimalbrüche zu multipliciren 251
§ § Benannte Zahlen mit einer gemischten Zahl zu multipliciren 256

Anwendung der arithmetischen Verhältnisse und Proportionen.

§. 194. Aus dem ersten Glied und der Differenz des zweiten Gliedes zu finden 259
§ § Aus dem zweiten Glied und der Differenz das erste Glied zu finden 259
§ § Die Differenz eines Verhältnisses zu finden . . 260
§ 195. Chronologische Beispiele 260
§ 196. Verhältnisse, dessen Glieder Brüche sind . . 261
§ 197. Von einem Verhältnisse eine Zahl abgezogen oder ꝛc. 262
§ 198. Veränderungen einer arithmetischen Proportion . 262
§ 199. 1) Beispiel über Alter 263
§ § 2) § § Vermögen 264

Seite.

§. 199. 3) Beispiel über eine stetige Proportion . . 264
" " 4) " " ein arithmet. Mittel . . . 265
" " 5) " " eine Durchschnittszahl . . . 265
" " 6) " " den mittlern Barometerstand . 266
" " 7) Beispiel über die mittlere Tagstemperatur . 266
" " 8) " " die mittlere Jahrestemperatur . 268

Anwendung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen.

§. 201. 1) Geschwindigkeit der Kanonenkugel u. d. 2c. . 269
" " Verhältniß der specifischen Gewichte 271
" " " der Kräfte 272
" " " von Kassenvorräthen 273
" " " von Arbeiten 273
" " " von Taglöhnen 274
" " " des Windes zum Orkan 274
" " " des Brodpreises in 2 Jahren . . . 274
" " " der Geschwindigkeiten v. Dampfschiffen 275
" " " über die Füllung eines Brunnen . . 276
" " " über Bevölkerung 276
" " " der Sonnenbewegung und der Erde . 277
" " " der Erd- und Mondentfernung . . 277
" " " der Venus- und Erdentfernung . . 277
" " " der Höhen zweier Thürme 772
" " " der Geschwindigkeit zweier Boten . . 277
" " " des Umfangs zweier Gärten . . . 278
" " " des Gulden zum Kronenthaler . . 278
" " " der Dukate zum Friedrichsd'or . . 278
" " " des Franc zum Livre 279
" " " der Kosten zweier Sorten Backsteinen . 280
" " " des kubischen Inhalts zweier Steine . 281

Seite.

§. 201. Verhältniß des Raums zweier Steinmassen . . 281
" " " des Pariser- und englischen Fußes . . 282
" " " des württb. und Pariser-Fußes . . 282
" " " des Kronenthalerwerths zum preuß. Thaler 283
" " Verhältnisse des württemb. Fußes zu andern . . 284
" " " der württemb. Elle zu andern . . 286
" " Werthe des Aequatorgrades in verschiedenen Meilen 288
" 202. Bestimmung des Verhältnisses zweier Längen . . 291
" " 1 Tafel für die Werthe der Längengrundmaaße . 293
§. 203. Zusammensetzung und Theilung der Längeneinheit 294
" " II. Tafel für die Längeneinheiten 295
" 204. Verwandlung eines Maaßes in das andere . . 298
" 205. Verhältniß des württb. □Fußes zum Pariser . 299
" 206. III. Tafel für die Flächenmaaßwerthe . . . 301
" 207. Entwicklung der Körpergrundmaaße . . . 303
" 208. IV. Tafel für die Werthe der Raummaaße . . 306
" 209. Verwandlung der Raummaße in andere . . 315
" 210. Gebrauch der Tafel I. 318
" 211. Gebrauch der Tafel II. 319
" 212. Gebrauch der Tafel III. 321
" 213. Gebrauch der Tafel IV. 324
" 214. Von dem Luftgewichte 327
" 215. V. Tafel der Gewichte 329
" 216. Gebrauch der Tafel V. (Zollgewicht) . . . 333
" 217. Berechnungen aus dem specifischen Gewichte . 336
" 218. VI. Tafel, über die specifischen Gewichte fester Körper 342
" 219. VII. Tafel über die specifischen Gewichte elast. Flüssigkeiten 344
" 220. VIII. Tafel über die specifischen Gewichte tropfbarer Flüssigkeit 345
" 221. IX. Tafel. Linear-Ausdehnungen 346
" 222. Erklärung der Metall-Münzen 347

Seite.

§. 222. X. Tafel über die Münzwerthe 349
= 223. Höhenzahlen mehrerer Gebäude 361
= 224. Gränzen der Schneelinie 362
= 225. Verhältnisse in unserem Planetensystem . . . 363
Zusätze . . . . . von S. 365 bis 368

Einleitung.

Allgemeine Erklärungen.

§. 1.

Rechenkunst oder Arithmetik beschäftigt sich mit den verschiedenen Verfahrungsarten: eine Zahl zu finden, die zu andern Zahlen gegebene Verhältnisse hat.

§. 2.

Eine Zahl ist der Ausdruck für den Begriff mehrerer einander gleicher Gegenstände, von denen man den einen für den andern nehmen könnte.

§. 3.

Jeder Zahl liegt die Einheit*) zu Grunde, und ist ein gewisses Vielfache von dieser.

§. 4.

Die Vermehrungen der Einheit um sich selber werden von der ersten an, welche Eins heißt, auf folgende Art benannt:

*) Es genüge hier zu erklären, daß man die Einheit für das gemeinschaftliche Merkmal gleicher Gegenstände hält. Weitere Untersuchungen wären überflüssig.

						nämlich:
Eins	und	eine	Einheit	heißt	Zwei	Einheiten
Zwei	„	„	„	„	Drei	„
Drei	„	„	„	„	Vier	„
Vier	„	„	„	„	Fünf	„
Fünf	„	„	„	„	Sechs	„
Sechs	„	„	„	„	Sieben	„
Sieben	„	„	„	„	Acht	„
Acht	„	„	„	„	Neun	„
Neun	„	„	„	„	Zehn	„

u. s. w.

§. 5.

Vorstehende Benennungen nun werden durch arabische Ziffern *) bezeichnet, und zwar:

Eins	durch	1.	Einheitsziffern oder Einheitszahlen auch Einer.
Zwei	„	2.	
Drei	„	3.	
Vier	„	4.	
Fünf	„	5.	
Sechs	„	6.	
Sieben	„	7.	
Acht	„	8.	
Neun	„	9.	
Zehn	„	10.	Zehner

u. s. w.

*) Werden diese einfachen Zeichen bis 9 dazu gebraucht, eine gewisse Ordnung anzuzeigen, und zwar dieselbe, wie sie selbst auf einander folgen, so nennt man sie Ziffern; bedient man sich ihrer aber um eine gewisse Menge zu bezeichnen, so werden sie Zahlen genannt. Sind mehrere solche Zeichen mit einander verbunden, so heißt die ganze Verbindung: Zahl und die einzelnen Glieder: Ziffern.

Es ist demgemäß Eins zuweilen auch eine Zahl.

In der letzten Zahl 10 kommt zwar der Einser wiederholt, jedoch dabei ein neues Zeichen 0 vor, dessen Bedeutung später erklärt werden soll.

Mit den aufgeführten Ziffern läßt sich jede beliebige Menge gleicher Gegenstände bezeichnen, und die verschiedene Verbindung derselben, welche nach einem bestimmten Gesetze geschieht und wodurch jene Sprache erreicht wird, ist in Folgendem dargestellt.

§. 6.

Die Benennung und Bezeichnung aller möglichen Mengen oder Zahlen, nennt man Numeriren oder Zählen.

Die Benennung wird fast gänzlich durch die Nro. 4 erklärten Zahlwörter, die Bezeichnung aber durchaus mit den Zeichen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0., welche als solche von 1. an bis 9. Ziffern heißen, erreicht.

Das letztere Zeichen 0. heißt Null und bedeutet an und für sich keinen Werth, sondern wird nur dazu gebraucht, die fehlende Ziffer in einer Ordnung, und dadurch diese selbst für die übrigen Ziffern anzuzeigen.

§. 7.

Nachdem man vorher allmählig der Einheit noch weitere Neun Einheiten beigefügt hatte, so erhielt man die Zahl 10., mit welcher der erste Abschnitt der in Gebrauch gekommenen Zahlenordnung schließt.

Aus eben Gesagtem und schon aus der Benennung geht hervor, daß man Zehn Einheiten nöthig hatte, um die Zahl 10. zu erzeugen, und solche also Zehn mal größer ist als Eins. Nun ist angenommen, daß dieses Zehnfache der Einheit Ein Zehner genannt, und durch die Ziffer 1. angedeutet wird, indem man nur dieser Ziffer 1. eine andere Stelle giebt und zwar in der Art:

man denkt sich neben einander zwei Spalten und nimmt an, die Spalte rechts gehöre den Einheitsziffern von 1 bis 9 an, wogegen alle Ziffern, welche sich um das Zehnfache ver-

größern sollen, in die Spalte links gesetzt werden und sodann Zehnerziffern, oder schlechtweg Zehner heißen. Es werden diese Spalten von der Rechten zur Linken, erste, zweite Ordnung genannt. In dem vorgegebenen Falle nun soll angedeutet werden, daß sich Eins zehnfach vergrößert habe, oder daß 1 Ein Zehner seye, so könnte man solches dadurch anzeigen.

2te Ordnung Zehner	1ste Ordnung Einheitsz.
1.	

Da jedoch diese Bezeichnung zu umständlich wäre, so ist man dahin übereingekommen, die Ziffern ohne andere merkliche Abscheidungen nebeneinander zu setzen, als daß die Einheitsziffern immer zur Rechten und neben ihnen links die Ziffern der Zehner ihre Stelle erhalten.

Will man auf diese Art 1 Zehn schreiben, so nimmt man das Zeichen 0 Null zur Hülfe und setzt solches an die Stelle der Einer, da kein solcher über Zehn vorhanden; neben die 0 links schreibt man die Eins, wodurch die richtige Ordnung dargestellt ist.

z. B.: 10. d. h.

Null oder keine Einheit und Ein Zehner; und nach dem Sprachgebrauch blos: Zehn *).

§. 8.

Das Nämliche gilt von den übrigen Einheitsziffern, wenn sie um das Zehnfache vermehrt werden, z. B. das Zehnfache von 2 oder zwei Zehner und keine Einheit

*) Man muß sich bei Zeiten angewöhnen, bei jeder möglichen Zahl rechts von der Einheitsziffer einen Punkt zu setzen, um dadurch den Anfang zu bezeichnen.

wird	bezeichnet	mit	20	und	heißt	Zwanzig
das Zehnfache	von	3	"	30	"	"	Dreißig
"	"	"	4	"	40	"	"	Vierzig
"	"	"	5	"	50	"	"	Fünfzig
"	"	"	6	"	60	"	"	Sechszig
"	"	"	7	"	70	"	"	Siebenzig
"	"	"	8	"	80	"	"	Achtzig
"	"	"	9	"	90	"	"	Neunzig.

Es ist leicht einzusehen, daß man hiebei nur die Ziffern, welche um ihr Zehnfaches vermehrt werden sollten, eine Stelle weiter links rückte und an ihre vorigen Plätze Nullen setzte. Die Ziffern heißen nun Zehnerziffern.

§. 9.

Bis daher sind blos die Einheitsziffern, welche dem ersten Zehner vorangehen, in Betracht gekommen; da aber bei der Zahl 20, welche aus zwei Zehnern besteht, der zweite Zehner auf die gleiche Reihe von Einheitsziffern gestützt seyn muß, so ist es nöthig, die Verbindung von letztern mit dem ersten Zehner zu zeigen.

§. 10.

Will man dem ersten Zehner noch die Einheit oder eine Einheitsziffer des zweiten Zehners beifügen, so darf man diese betreffende Ziffer nur in die ihr oben Nro. 7 angeführte Ordnung der Einheitsziffern statt der 0 setzen, und ihren Zusammenhang mit dem ersten Zehner als eine Zahl ansehen, welche eigentlich benannt werden sollte:

Ein Zehn und die beliebige Einheitszahl

z. B. man soll dem ersten Zehner die 5 Einheiten des 2ten Zehners einverleiben, so würde man setzen 15, welches auf die natürliche Weise heißen sollte: Zehn und Fünf, wobei man unter Zehn immer nur Ein Zehn verstehen muß; indem im andern Falle dem Zehner die vermehrende Ziffer in der Aussprache vorangesetzt wird.

Es ist aber herkömmlich, die Einheitsziffern der Zehner

vorderst, und die mit ihnen verbundene Zehnerziffern nach ihnen auszusprechen, so daß es im vorigen Beispiel heißt:

Fünf und zehn, oder vielmehr: Fünfzehn; indem man das Verbindungswort und ganz wegläßt.

§. 11.

Gleichfalls, wie nach dem ersten Zehner, die Einer Reihe des zweiten Zehners beginnt, so fängt sie nach diesem wieder für den 3ten, nach diesem für den 4ten u. s. f. an.

§. 12.

Da bei den zwei ersten Verbindungen der Einheit und der Zahl Zwei mit dem ersten Zehner, von den übrigen abweichende Benennungen vorkommen, so stehen sie hier:

Zehn und Eins wird geschrieben 11 und heißt Eilf
" " Zwei " " 12 " " Zwölf.

Die übrigen Einheitszahlen werden dem Namen nach mit dem ersten Zehner in der nämlichen Ordnung verbunden wie vorher Nro. 10 die Fünfe. Der Bezeichnung nach giebt es keine Ausnahme: 13 heißt Dreizehn, 14 Vierzehn, 16 Sechszehn, 17 Siebenzehn ꝛc., 19 Neunzehn.

§. 13.

Die Verbindung der übrigen Zehner mit der Einheit und den Einheitszahlen von dem je folgenden Zehner wird in jeder Beziehung wie in Nro. 10 behandelt, z. B. die Bezeichnung ist:

Zwanzig und Eins	vom	3ten	Zehner	— — 21
" " Sechs	"	"	"	— — 26
Dreißig und Fünf	"	4ten	"	— — 35
Vierzig und Sieben	"	5ten	"	— — 47
Fünfzig und Neun	"	6ten	"	— — 59
Sechszig u. Sechs	"	7ten	"	— — 66
Siebenzig u. Zwei	"	8ten	"	— — 72
Achtzig u. Sieben	"	9ten	"	— — 87
Neunzig u. Acht	"	10ten	"	— — 98

die Aussprache, bei welcher das Verbindungswort und gebraucht wird, ist für

21 Ein und Zwanzig, 26 Sechs und Zwanzig, 35 Fünf und dreißig, 47 Sieben und Vierzig, 59 Neun und Fünfzig u. s. w.

§. 14.

Wir haben nun von 1 an bis zu 99 zählen gelernt; da jedoch das Zahlensystem unbegränzt ist, so muß wenigstens die Regel gezeigt werden, nach welcher sich dasselbe weiter ausdehnt.

Die Zahl 99 besteht aus 9 Zehner und 9 Einheiten, wird diesen 9 Einheiten noch Eine zugefügt, so giebt es einen Zehner und man hat nun 10 Zehner, oder Zehnmal Einen Zehner. Solches wird dadurch in den Ziffern bemerkt, daß man die Zehnerziffer wieder um eine Stelle weiter links in die dritte Ordnung rücken läßt; denn es gilt der Grundsatz bis ins Unendliche:

„Jede Ziffer, von jeder Ordnung vergrößert „sich um das Zehnfache, wenn sie in die nächste „Ordnung ihr zur Linken gebracht wird.“

In der dritten Ordnung heißt man die Ziffern Hunderter, d. h. wenn 1 die Ziffer ist, so wäre 100 Einhundert Hundert mal größer als die Einheit und 10 mal größer als Ein Zehner.

Rückt die Einheit noch um eine Stelle links

in die vierte Ordnung so wird die Zahl 1000 Ein Tausend genannt

" " fünfte " " " " " 10000 Zehntausend

" " sechste " " " " 100000 Hunderttausend

" " siebente " " " " 1000000 Eine Million

" " achte " " " " 10000000 Zehn Millionen

" " neunte " " " 100000000 Hundert Million

" " zehnte " " " 1000000000 Tausend Million.

" " eilfte " " " 10000000000 Zehntaus. Mill.

" " zwölfte " " 100000000000 Hunderttaus. Mill.

" " dreizehnte " 1000000000000 Eine Billion

Anmerk. Diese Art immer auf Zehen zu zählen kommt wahrscheinlich von den Fingern her. Sie heißt das Dekadische oder Dezimal-System.

§. 15.

Will man noch weiter zählen, so darf man nur die Eins links rücken und die nämliche Periode wie vorher: Zehn-, Hundert-, Tausend-, Zehntausend-, Hunderttausend-Billionen durchlaufen lassen, wodurch man in die achtzehnte Ordnung kommt. In der neunzehnten Ordnung heißt die Eins: Eine Trillion. Von hier aus gienge es auf die gleiche Art weiter.

Man sieht daraus, daß immer die nämlichen 6 Klassen zu einer Zahlgattung gehören. Jede dieser Gattungen fängt mit den Einheiten an und endigt mit Hunderttausender. Man bezeichnet den Anfang einer neuen Gattung mit Strichen, die man oberhalb an die Ziffer ihrer Einheitszahlen, je nach dem Grade der Ordnung von der Rechten zur Linken anhängt, z. B.

```
                |||        ||        |
. . . . . . 1 000000  1 000000  1 000000
            .         .         .
            .         .         .
Trillionen  ·Billionen · Millionen · Einer.
            .         .         .
            .         .         .
```

Noch wird der schnellern Uebersicht halber jede Gattung durch ein Komma in der Mitte getheilt, so daß vor dem Komma die Tausender und hinter demselben die Hunderter sich befinden, als wie

```
|||        ||        |
1000,0001000,000 1000,000.
```

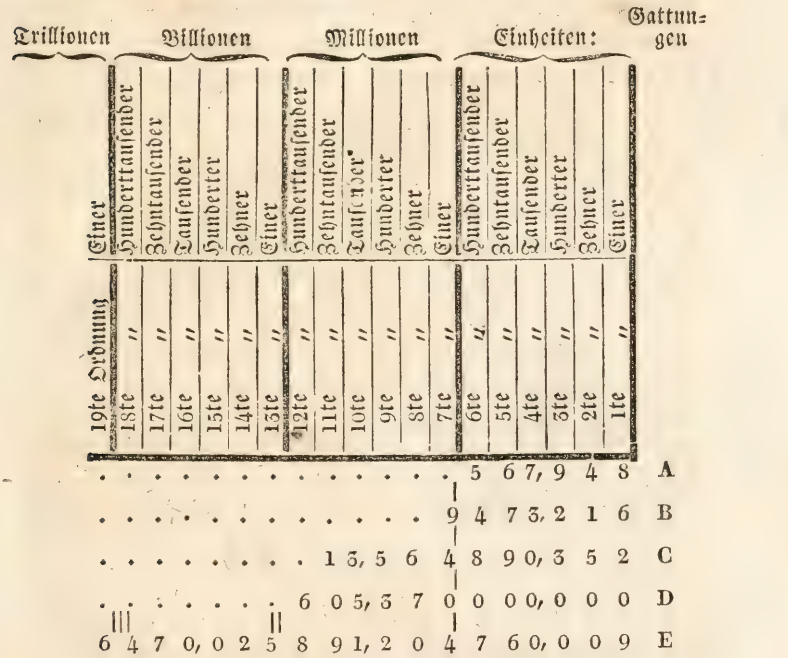
Alles, was über die Vermehrung und die Gattung der Einheit durch ihr Vorrücken von der Rechten zur Linken gesagt worden ist, gilt auch von jeder andern Ziffer; nämlich jede bedeutet nach ihrem Eintritt in die nächste Ordnung zehnmal so viel als vorher.

§. 16.

Nach dem Bisherigen kann es nun nicht mehr schwer seyn, jede Reihe von Zahlen gehörig zu benennen und zu begreifen; oder umgekehrt, jede verlangte Summe mit Ziffern

anschreiben zu können. Das Letztere auszuführen darf man nur die betreffenden Ziffern in die entsprechenden Ordnungen setzen, worin man bei einiger Uebung bald Fertigkeit erlangen kann.

Zum Ueberfluß seyen hier die Ordnungen und ihre Benennungen mit zusammengesetzten Zahlen in Verbindung gebracht:



Bei den Zehnern der Einheiten ist gesagt worden: wenn sie in Verbindung mit Einheitsziffern sich befinden, so werden diese vor dem Zehner ausgesprochen; solches gilt nun auch von den Zehnern und Einheitsziffern der übrigen Gattungen. Nur bei den einfachen Tausendern und den Hunderten findet die Regel Statt, daß Tausend voraus, hierauf die Hundert und nach diesen die Zehner auf die bemerkte Art ausgesprochen werden. Immer aber fängt man bei der in der höchsten Ord-

nung stehenden Ziffer einer Zahl an, z. B. die voranstehenden Zahlen heißen:

A. Fünfhunderttausend, Sieben und sechszigtausend, Neun-Hundert, Acht und Vierzig, welches man zusammenzieht in:
„Fünfhundert-Sieben und Sechszig-Tausend, Neun „Hundert, Acht und Vierzig."

B. „Neun Millionen, Vier Hundert-Drei und Siebenzig-„Tausend, Zwei Hundert und Sechszehn."

C. „Dreizehn Tausend Fünf-Hundert, Vier und Sechszig „Millionen, Acht-Hundert-Neunzig-Tausend, Drei-Hun-„dert, Zwei und Fünfzig."

D. „Sechshundert Fünftausend-, Dreihundert, siebenzig Mil-„lionen."

E. „Sechs Trillionen, Vierhundert Siebenzigtausend, Fünf „und Zwanzig-Billionen, Achthundert Ein und Neunzig-„tausend-, Zweihundert und vier Millionen, Siebenhun-„dert-Sechzigtausend und Neun *)."

§. 17.

Ueber die Verhältnisse der Zahlen unter sich läßt sich hier nichts mehr sagen, da solches in den folgenden Abhandlungen vorkommt.

Einige Bemerkungen mögen noch hier stehen:

1000 000,000 heißt eine Milliarde
12 „ ein Dutzend
2 „ ein Paar.

Denkt man sich eine beliebige Reihe Einheiten (Dinge) und auf jede Einheit dieser Reihe eine zweite Einheit gelegt, so nennt man die Summe der Einheiten dieser Doppelreihe eine gerade Zahl.

Bliebe eine Einheit unbedenkt, so giebt die Summe eine ungerade Zahl.

*) In denjenigen Ordnungen, wo sich o befindet, kann natürlich nichts ausgesprochen werden, weil dieselbe bedeutet, daß keine Ziffer dahin gehört.

Diesem nach ist 2 die kleinste gerade und
1 „ „ ungerade Zahl.

§. 18.

Der gegebenen Erklärung gemäß macht die Einheit den Unterschied zwischen gerad und ungerad; und da die natürliche Zahlenreihe immer um die Einheit zunimmt, so müssen die geraden Zahlen in derselben regelmäßig mit den ungeraden wechseln. Daher:

ungerade Zahlen	1	3	5	7	9	u. s. w.
gerade „	2	4	6	8	10	u. s. w.

Beide Reihen wachsen von dem ersten Gliede an immer um zwei Einheiten.

§. 19.

Uebersicht der verschiedenen Rechnungs-Arten und der gebräuchlichen Zeichen.

Es ist gezeigt worden, wie durch Vermehrung der Einheit alle Zahlen entstehen; eben so könnte man diese Zahlen selbst durch umgekehrtes Verfahren wieder beliebig vermindern.

In der Vermehrung oder Verminderung einer Zahl aber liegt der Inbegriff ihrer Brauchbarkeit zu Darstellung jedmöglichen Maaßes.

Von diesem Gesichtspunkt ausgegangen entstand die folgende Eintheilung in vermehrende und vermindernde Rechnungsart.

Jede dieser Rechnungsarten zerfällt wieder in zwei Abtheilungen, jedoch nur in Beziehung auf bestimmte Fälle, wo die verlangte Vermehrung oder Verminderung auf einem kürzern Wege bezweckt werden kann.

Zwar sind diese Unterabtheilungen in den meisten Lehrbüchern der gemeinen Rechenkunst als besondere für sich bestehende Abschnitte behandelt, was jedoch nur von einer irrigen Ansicht herrühren kann.

§. 20.

So lange nichts besonders erwähnt wird, müssen die Zahlen als aus gleichartig zusammengesetzten Dingen, die sich auf jede Art vereinigen oder trennen lassen, ohne ihren eigenthümlichen Werth zu verlieren, betrachtet werden.

Eben so wird man anfänglich nur mit ganzen Zahlen, d. h. in denen die Einheit als ein Ganzes, Selbstständiges *) gedacht werden muß, umgehen.

§. 21.

Die arithmetischen Zeichen, welche angewendet werden und die man sich besonders der Abkürzungen halber merken muß, sind folgende:

= heißt Gleich

\+ " plus oder Mehr oder addirt } vermehrend

× · () " mal oder multiplicirt } vermehrend

— " minus, abgezogen oder weniger } vermindernd

: ÷ " dividirt oder zu } vermindernd

§. 22.

Vermehrende Rechnungsart **).

a) Durch Addiren.

Sind zwei oder mehrere verschiedene Zahlen gegeben, und man will diejenige Zahl oder Summe wissen, welche die sämmtlichen gegebenen Zahlen genau in sich faßt, d. h. welche so viel Einheiten, so viel Zehner, so viel Hunderter ꝛc. besitzt, als die Zahlen miteinander haben, so kann man dieß dadurch erfahren, daß man die Gegebenen addirt, welches so

*) Solche braucht aber nicht von einem Begriff als Sache begleitet zu seyn, was erst bei der Anwendung des Rechnens aufs praktische Leben eintreten wird.

**) Die Rechnungsproben werden hinter der vermindernden Rechnungsart zusammen gestellt werden.

viel ist, als die Ziffern der gleichnamigen Ordnungen jeder Zahl zusammen zählen und auf das erklärte Dezimalsystem zu reduziren.

§. 23.

Gehe man den natürlichsten Weg, vom Einfachen zum Zusammengesetzten und nehme an:

Aufgabe. „Es solle diejenige Zahl gefunden werden, die so groß ist, als 3 und 4 zusammen."

Bezeichnet man einstweilen mit x die unbekannte Summe, so läßt sich die Aufgabe

durch $3 + 4 = x$ darstellen;

d. h. „drei und dazu vier addirt ist gleich x."

Beide gegebenen Zahlen haben nur eine Ziffer, welches bedeutet, daß sie zur 1sten Ordnung gehören, oder Einheitszahlen sind. Da man nun wissen will, was dieselben zusammen ausmachen, so heißt dieß soviel, als man solle die Anzahl der Einheiten der einen Zahl zu denen der andern hinzuthun. Weil nun 4 die größere Zahl ist, so ist es bequemer, ihr die 3 aufzuzählen, welches durch 3malige Wiederholung der Einheit, wie in Nro. 4, geschehen könnte, und wodurch man die Zahl 7 erhalten würde, so daß

$3 + 4 = 7$ wäre; ebenso müßte

aber $4 + 3 = 7$ seyn, weil weder eine Einheit hinzu, noch weggekommen ist. Da jedoch ein solches Aufzählen sehr zeitraubend wäre, so muß man sich bald gewöhnen, die Summen der einfachen Zahlen mit einem Blicke zu übersehen *), was nur durch Anwendung von Beispielen für alle möglichen Fälle erreicht wird.

§. 24.

In dem gegebenen Beispiele ist durch die Entwicklung

*) Anfangs sich ein Täfel'chen mit allen Verbindungen der 9 Einheitsziffern zu 2 und 2 entwerfen.

lung das unbekannte $x = 7$ geworden, und sonach die Auflösung beendet.

§. 25.

Die zwei Zahlen 3 und 4, welche zu addiren waren, heißen summirende Glieder, und die Zahl 7, in welcher beide genau einmal enthalten sind, heißt die Summe der Glieder. Vergleicht man jede der Zahlen 3 und 4 mit der Summe 7 besonders, so ist immer die andere ihr Complement oder ihre Ergänzung zur Summe:

z. B. 4 ist das Compl. von 3 zu 7
3 " " " " 4 " 7

§. 26.

Aufgabe. „Die Zahl zu finden, welche so groß ist „als 8 und 7 zusammen."

Auflösung: $8 + 7 = x$.

In Nro. 4 kann man sehen, daß der 8 nur noch zwei Einheiten zuzusetzen waren, um 10 zu erhalten.

Verwendet man nun in diesem Beispiele zwei Einheiten von 7 zur Bildung des ersten Zehners mit der Zahl 8, so fallen die noch übrigen Einheiten der 7 in den zweiten Zehner und sind die Ergänzung von 2 zu 7 d. i. 5.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 7 = 2 + 5 \text{ addirt} \\ \hline 10 + 5 = 15; \end{array} \quad 8 + 7 = 15\ (x)$$

§. 27.

Da in keiner Zahlenordnung eine größere Ziffer vorkommen kann als 9, weil solche bei einer weitern Zunahme um 1 Ein Zehner dieser Ordnung, und durch die Ziffer 1 in der nächsten Stelle links angedeutet wird, so möchte es zweckmäßig seyn, die Ergänzungen der 9 Ziffern zu 10 hier zusammenzustellen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	10	10	10	10	10	10	10	10

§. 28.

Aufgabe. „Es sollen die Zahlen 17 und 6 addirt werden." $17 + 6 = x$.

Wenn zusammengesetzte Zahlen addirt werden sollen, so bringe man solche zunächst unter gleiche Benennung, d. h. man setze sie so untereinander, daß die gleichnamigen Ziffern untereinander kommen und sich decken; also Einerziffern unter Einerziffer, Zehnerziffer unter Zehnerziffer u. s. f. Die Ordnung, in welcher die Zahlenreihen *) selbst aufeinander folgen, ist ganz beliebig. Unter die letzte Zahlenreihe ziehe man einen Querstrich, zum Zeichen, daß nichts mehr anzusetzen ist und zähle hierauf die gleichnamigen Ziffern, indem man bei den Einern anfängt, nach und nach gegen die Linke zusammen. Macht die Summe der Ziffern einer Ordnung gerade einen Zehner aus, so wird in gleicher Linie mit denselben unter den Strich eine 0 gesetzt und die erhaltene Zehnerzahl zur nächsten Reihe genommen, weil sie ja mit solcher gleichnamig ist; erhält man aber bei der Addition einer Ziffernreihe noch Einheiten des nächsten Zehners, so setze man die Zahl dieser Einheiten in die nämliche Zifferreihe unter den Querstrich und verfahre im Uebrigen wie vorher, und zwar so lange, bis keine Ziffer mehr übrig ist.

Auflösung der Aufgabe: 17
6
Summe = 23; $17 + 6 = 23$ (x)

nämlich: zu 6 Einheiten fehlen noch 4 nach Nro. 27, um den ersten Zehner zu formiren, nimmt man nun die 4 von dem 7er, so ist die Ergänzung der 4 zu 7 = 3; oder 3 Einheiten gehören dem 2ten Zehner an, welche Zahl in die Reihe der Einheiten unter den Strich gesetzt wird. Den erhaltenen Zehner nimmt man jetzt in die zweite Ordnung, wo sich be-

*) Zur bessern Verständigung seyen die zugehörigen Zahlen in der Querlinie mit Zahlenreihe, und die Ziffer in der Vertikallinie Zifferreihe benannt.

reits einer vorfindet; daher geben sie zusammen zwei Zehner, was durch die entsprechende Zahl 2 angedeutet wird *).

§. 29.

Auf gleiche Art, wie bisher gezeigt worden, wird die Addition von so vielen Zahlenreihen als man will, behandelt. Natürlich kann es vorkommen, daß die Summe der Einheitszahlen schon Hunderte, Tausende u. s. w. ausmachen, in welchem Falle man sich auf zweierlei Weise vor Irrungen bewahren kann —:

1) Man werfe die Summe jeder Zifferreihe besonders untereinander so aus, daß die gleichen Benennungen sich decken, und summire diese Partial-Summen noch einmal zur Total-Summe, z. B. was giebt: 3,740 + 45,866 + + 699 + 206,548 + 37 + 9'122,597 + 115,777 + + 99,099 + 6,089 + 358 + 8 + 1,106 + 920'312,727 + + 19 + 101,206 = x?

---

*) Ist man einmal gewöhnt, die Summe zweier Ziffern, sie mögen heißen wie sie wollen, auswendig zu behalten, so geht die Addition viel schneller. Im gegebenen Beispiele würde man auf diese Art verfahren: 6 und 7 macht dreizehn, oder 1 Zehn und 3 Einheiten; daher man 3 in die 1ste Ordnung setzt und 1 in die nächste Ordnung der Zehner überträgt. Letztere Ordnung enthält aber schon die Ziffer 1, mithin heißt es ferner: 1 und 1 macht zwei, für die 2te Ordnung.

i	h	g	f	e	d	c	b	a	
.	.	.	.	.	3,	7	4	0	
.	.	.	.	4	5,	8	6	6	
.	.	.	.	.	.	6	9	9	
.	.	.	2	0	6,	5	4	8	
.	.	.	.	.	.	.	3	7	
.	.	9′	1	2	2,	5	9	7	
.	.	.	1	1	5,	7	7	7	
.	.	.	.	9	9,	0	9	9	Ansatz
.	.	.	.	.	6,	0	8	9	
.	.	.	.	.	.	3	5	8	
.	.	.	.	.	.	.	.	8	
.	.	.	.	.	1,	1	0	6	
9	2	0′	3	1	2,	7	2	7	
.	.	.	.	.	.	.	1	9	
.	.	.	1	0	1,	2	0	6	

| | | |

§. 30.

Noch Weiteres über das Addiren zu sagen, wäre überflüssig, weil die Gewandtheit nur durch Uebung erreicht werden kann, wozu Beispiele am tauglichsten sind, von denen hier noch mehrere aufgeführt werden.

1) 75 + 144 + 9 + 56,480 + 9,040 + 7′120,048 = 7′185,796.

2) 5,264 + 33,046 + 79,044 + 80,092 = 197,446.

3) 87,286 + 7,889 + 64,778 + 62,989 + 7,788 + + 9,898 + 8,779 + 187 + 988 + 977 + + 789 + 888 + 9,187 = 262,433.

4) 1′725,000 + 120,000 + 300,000 + 500,000 + + 600,000 + 16,500 + 1′583,000 + 53,600 + + 952,000 = 5′850,100.

5) 891,677 + 352,596 + 170,000 + 431,422 + + 302,778 + 200,000 + 895,000 + 600,000 + + 200,000 = 4′043,473.

6) 39′511,777 + 16′722,222 + 5′474,744 + 3′777,777 + + 47′600,000 + 1′547,777 + 15′866,666 + + 15′866,666 + 453,333 + 4′200,887 + 2′170,333 + + 302,222 + 434,713 + 1′618,777 + 1′888,888 + + 138,898 + 2′644,444 + 1′288,888 + 1′511,111 + + 90,666 = 163′110,779.

7) 15′736,069 + 5′793,120 + 557,209 + 17′980,938 + + 5′033,338 + 5′880,221 + 2′587,684 + 2′089,952 + + 357,368 + 3′658,712 + 2′876,177 + 18′004,153 + + 3′941,707 + 2′909,171 + 3′184,135 = 90′398,154.

§. 31.

b) Durch Multipliciren.

Handelt es sich darum, eine beliebige Zahl einigemal zu sich selbst zu addiren, d. h. eine Summe zu finden, in welcher dieselbe mehrfach genau enthalten ist, so könnte eine solche Aufgabe nach der vorigen Methode gelöst werden. Da es aber ein viel kürzeres Verfahren unter dem Namen Multipliciren giebt, so wird dieses hier erklärt. Z. B.

„man will die Zahl wissen, in welcher 74 „Fünfmal enthalten ist."

Nach den Regeln der Addition wäre die Unbekannte $x = 74 + 74 + 74 + 74 + 74$. Aus dieser Zusammenstellung ersieht man aber sogleich, daß die Ziffern, aus welchen die vorgegebene Zahl zusammengesetzt ist, so oft vorkommen, als solche in der neuen Summe enthalten seyn solle; also hier 5 mal.

Wenn man nun weiß, daß 5×4 Einer $= 20$
und 5×7 Zehner $= 350$
macht, so erhält man durch Addition dieser zwei Zahlen die verlangte Summe $= 370$.

§. 32.

Erklärung. Bei dieser vermehrenden Rechnungsart kommen immer nur zwei Glieder in Betracht: nämlich die Zahl, welche um sich selbst vermehrt werden und diejenige, welche anzeigt, wie oft dieses geschehen soll.

Die Bezeichnung für die Glieder der Multiplication ist: das erstere Multiplicand und das andere Multiplicator zu nennen.

In Beziehung aber auf das zu erzielende Resultat, welches Product heißt, nennt man beide Glieder Factoren.

§. 33.

Um die Vermehrung durch Multiplication auszuführen, setzt man unter den Multiplicand den Multiplicator so, daß

deſſen Einer unter die Einer, deſſelben Zehner unter die Zehner u. ſ. f. des Multiplicandus zu ſtehen kommen; alſo daß wie vorhin beide Zahlen unter gleiche Benennung gebracht ſind. Z. B.

74 ſoll 5 mal vermehrt werden

74 Multiplicand
5 Multiplicator } Factoren.

370 Product.

Da 5×4 Einheiten keine Einheit über 2 Zehner giebt, ſo ſchreibt man die 0 in die erſte Ordnung, und addirt zu 5×7, d. h. 35 Zehner jene 2 Zehner, welches zuſammen 37 Zehner oder 370 Einheiten ausmacht.

§. 34.

Sehr einleuchtend iſt, daß es gleich viel wäre, ob man geſagt hätte, die Zahl 5 ſoll 74 mal um ſich ſelbſt vermehrt werden; denn die Zahl 74 beſteht aus 7 Zehner und 4 Einheiten, alſo wird die Zahl 5 mit der Einheitszahl — 4 mal genommen, welches 20 giebt und mit der Zehnerziffer — 7 mal, welches 35 Zehner oder 350 Einheiten wie vorhin giebt.

Aus dieſem Grunde iſt es bei unbenannten Zahlen auch einerlei, welchem Gliede einer Multiplication man die Benennung Multiplicand, oder Multiplicator beilegt.

§. 35.

Wie bei der Addition, ſo iſt auch hier in ſchneller Auffaſſung der Producte, die Uebung der Meiſter. Dieſe zu erlangen iſt es zuvörderſt nöthig, die verſchiedenen Vielfachen der Einheitszahlen auswendig zu lernen, was man am Leichteſten durch Entwerfung des folgenden Täfelchens, welches man den pythagoräiſchen Rechentiſch nennt, erzielen kann. Die Entwerfung ſelbſt beſteht in nachſtehendem Verfahren: man ſetze die neun Einheitsziffern in eine Vertikalreihe untereinander, addire die erſte 1 ſo oft zu ſich ſelbſt, bis man die Zahl 9 erhält und ſetze die nach und nach erhal-

tenen Summen in eine Querlinie mit derselben; auf die nämliche Art verfahre man mit den andern Ziffern, und beobachte dabei nur, daß die gleichvielte Addition einer Zahl unter die gleichvielte der vorigen geschrieben werde.

	B	i	k	l	m	n	o	p	q	
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
a	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
b	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
c	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
d	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
e	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
f	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
g	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
h	9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Will man nun das bestimmte Vielfache einer Zahl wissen, so suche man die Zahl selbst oder den Multiplicand in der Vertikalzeile **B** auf, so wird das Verlangte in der ihr entsprechenden Querlinie liegen, weil diese alle möglichen Vielfachen derselben bis 9 enthält; die Anzahl der Vielfachen ist aber in der obern Querlinie **A** angedeutet, nimmt man in solcher die Vielfachszahl oder den Multiplicator, so liegt die Summe oder das Product auch in der zugehörigen Vertikalzeile. Das Verlangte liegt demgemäß in den zwei Reihen zugleich; daher in ihrem Zusammenstoß, oder der Zahl, welche beiden Reihen gemeinschaftlich ist: z. B. was ist das 7fache von 8, so würde gesagt:

„den Multiplicand 8 in der Vertikalreihe **B** aufgesucht,
„bildet mit seinen Vielfachen die Querreihe g, in welcher auch
„das verlangte Produkt liegen muß. Es ist aber gefordert,
„das 7fache von 8 anzugeben, daher man in der Querreihe **A**
„auf die Zahl 7 deutet und in der ihr zugehörigen Vertikal-
„zeile o, in welcher derselben Vielfache untereinander folgen,
„also auch das Gesuchte enthalten ist (§. 34) herunter fährt,
„bis man auf die bemerkte Querreihe der 8 kommt, so findet
„man die Zahl 56, welche den betreffenden Reihen g und 0
„gemeinschaftlich, daher auch das verlangte Produkt ist."

§. 36.

Jede Zahl, die mit 10 multiplicirt wird, behält ihre

Ziffern; solche dürfen sich nur um eine Stelle links in ihre nächsten Ordnungen schieben. Indem hiedurch die Stelle der Einheitszahlen entblößt wird, so füllt man solche wieder mit einer 0 aus. Das Kürzeste ist demnach, um das Zehnfache einer Zahl anzuzeigen, wenn man sie unverändert stehen läßt, ihr eine 0 anhängt und hinter diese den Punkt setzt.

Der Beweis für dieses Verfahren geht sehr leicht aus der Einleitung hervor, wo gesagt wurde, „daß sich jede Ziffer um ihr Zehnfaches vermehre, wenn sie um eine Ordnung links rückt. — Heißt es nun, eine Zahl soll mit 10 multiplicirt werden, so versteht sich darunter, daß jede Ziffer um ihr Zehnfaches vermehrt werden solle, was auf die angegebene Weise vollzogen wird.

Soll eine Zahl mit 100, 1,000, 10,000 u. s. f. multiplicirt werden, so hängt man derselben jedesmal nur so viel Nullen an, als die Zehnerpotenz selbst hat, also 2, 3, 4 u. s. f. Nimmt man hiebei immer zunächst die Einheitszahl in Betracht, um sich von der Richtigkeit des Verfahrens zu überzeugen, so hat man den kürzesten Weg; denn eine Einheitszahl 100 mal vermehrt, giebt so viel Hunderter als ihre Ziffer anzeigt; dieselbe gehört also nach der Vermehrung in die 3te Ordnung u. s. w. u. s. w.

mal	gleich		mal	gleich	
7 ×	10 =	70,	1,345 ×	10 =	13,450
20 ×	100 =	2,000,	17,809 ×	100 =	1'780,900
317 ×	1000 =	317,000,	650,866 ×	1000 =	650'866,000

u. s. w., u. s. w.

§. 57.

Soll eine Zahl mit irgend einem vielfachen Zehner multiplicirt werden, z. B. 5,837 mit 60, so wird man einsehen, daß nur die Zehnerziffer des Multiplicators vermehren kann, weil in seiner ersten Ordnung keine Einheitszahl steht. Das Produkt kann also auch keine dergleichen erhalten; denn die Einheitszahl 7 des Multiplicands 10 mal genommen giebt 70 daher: $6 \times 7 \times 10 = 420$.

In den Fällen, wo der Multiplicator in den letzten Ordnungen aus Nullen besteht, geht man von der in §. 33 gegebenen Regel ab, und setzt ihn so unter den Multiplicand, daß seine erste Ziffer von der Rechten zur Linken unter die Einheitsziffer von diesem gebracht wird; die zugehörigen Nullen können ihm sonach angehängt werden. Hierauf wird die Multiplication wie sonst vorgenommen und das erhaltene Produkt durch Anhängung der Nullen des Multiplicators zu dem wahren Werthe erhoben.

Der Ansatz für obiges Beispiel ist:

5,837
60

350,220

und für folgende

1) 67,945 × 700.
67,945
700

47′561,500

2) 195,899 × 5000.
195,899
5000

979′495,000

§. 38.

Es ist bereits schon so viel über die Multiplication gesagt, daß die ausführliche Erklärung des nachstehenden Beispieles, worin zu gleicher Zeit das Verfahren für alle übrigen Fälle enthalten ist, es möglich machen wird, jede weitere Verbreitung über diese Materie unterlassen zu können.

mal

Aufgabe: 6,548 × 3,076 = x

Auflösung: 6,548 Multiplicand
3,076 Multiplicator

39288
45836
196440

20′144,648 = x dem Produkt.

Nachdem, wie ersichtlich, der Multiplicator mit dem Multiplicand unter gleiche Benennung gebracht ist, fängt man mit der Einheitsziffer des erstern sämmtliche Ziffern des letztern zu multipliciren an, und zwar:

1) „6 mal 8 Einer macht 48, wovon 8 als Einer unter „die erste Ordnung, oder mit dem Ansatz gleichnamig ge„bracht wird, und 4 Zehner bleiben."
2) „6 mal 4 Zehner geben 24 Zehner und die vorigen „4 Zehner macht 28 Zehner, hievon die Zehnerziffer 8 in „die zweite Ordnung gesetzt, bleiben 20 Zehner oder „2 Hunderter übrig."
3) „6 mal 5 Hundert giebt 30 und die der übrigen 2 hin„zu, macht 32 Hunderter; deren Einheitszahl 2 in die „zugehörige 3te Ordnung der Hunderter gesetzt und die „übrigen 30 Hundert oder 3 Tausend für die nächste „behalten wird; endlich
4) „6 mal 6 Tausend macht 36 Tausend, hiezu die vorig' „übrig gebliebenen 3 addirt, giebt 39 Tausend," was nun ausgeschrieben wird, da in dem Multiplicand keine Ziffer mehr vorhanden ist, welche mit 6 zu multipliciren wäre.

Nach diesem fängt man mit der Ziffer 7 an, den Multiplicand zu vermehren; solche ist aber eine Zehnerziffer, daher das Produkt mit der Einheitsziffer von diesem nur Zehner geben kann, und die erste Zahl des Produkts in die zweite Ordnung unter die vorigen Zehner gesetzt werden muß, wie im Beispiel zu ersehen. Im Uebrigen wird wie vorhin verfahren, bis 6 Tausend vermehrt ist.

Die auf 7 folgende 0 des Multiplicators in der Stelle der Hunderter kann nicht vermehren, was man durch ihr bloßes Heruntersetzen in gleicher Ordnung andeutet. Endlich die noch übrige 4te Ziffer 3 des Multiplicators bezeichnet Tausender, daher auch ihr Produkt mit einer Einheitszahl Tausender werden müssen.

Aus Vorstehendem sieht man im Allgemeinen, daß jedes

Produkt des Multiplicands und einer Ziffer des Multiplicators immer mit der nämlichen Ordnung zur Rechten anfängt, in welcher diese Ziffer selbst steht.

Hat man auf die erklärte Weise alle Partial-Produkte gebildet, so werden solche als Glieder einer Addition betrachtet und summirt. Die hieraus erhaltene Summe aber ist das verlangte Produkt.

Will man das beobachtete Verfahren anfänglich noch mehr zergliedern, so betrachte man Folgendes mit Aufmerksamkeit, wodurch gewiß der richtige Zusammenhang der in Behandlung stehenden Vermehrung begriffen werden muß.

Der vorige Multiplicator 3,076 besteht aus:

$$3000 + 70 + 6$$

multiplicirt man nun den Multiplicand mit jeder dieser Zahlen besonders und addirt die erhaltenen Produkte, so kommt das Gleiche wie vorher heraus:

Multiplication mit 6 Einheiten	Multiplication mit 7 Zehner od. 70.	Multiplication mit 30 Hundert od. 3 Tausend
6548	6548	6548
6	70	3000
39,288 = A	458,360 = B	19'644,000 = C

A = 39,288
B = 458,360
C = 19'644,000

20'141,648 = Hauptprodukt;

oder noch ausführlicher:

6,548	6,548	6,548
···6	···70	···3000
··48	··56·	··24···
·24·	·28··	·12····
30··	35···	15·····
36···	42····	18·····
39,288 = A	458,360 = B	19'644,000 = C

Hier hat man zur Deutlichkeit der Benennung die Nul-

len mitgeführt; was bei einiger Uebung, wie im ersten Verfahren, überflüssig ist.

§. 39.

Beispiele:

1) 7,564 × 754 = 5′703,256.
2) 4′600,484 × 5,007 = 23,034′623,388.
3) 37,098 × 20,604 = 764′367,192.
4) 400,600 × 400,600 = 160,480′360,000.
5) 70′000,001 × 51,311 = 3″591,770′051,311.
6) 564,525 × 111,111 = 62,702′715,075.
7) 742,000 × 100,000 = 74,200′000,000.
8) 90′405,020 × 40,302 = 3″643,503′116,040.
9) 7′250,042 × 50,002 = 362,516′600,084.
10) 983,200 × 5,701 = 5,605′223,200.

§. 40.

Vermindernde Rechnungsart.

a) Durch Subtrahiren (Abziehen).

Erklärung. Wird verlangt, eine Zahl um so viel zu vermindern, als eine andere kleinere Zahl beträgt, d. h. so viel Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. wegzunehmen als die letztere enthält, so geschieht diese Verminderung durch ein Verfahren, welches man subtrahiren oder abziehen heißt.

§. 41.

Erkl. Die Zahl, von welcher eine andere weggenommen werden solle, oder überhaupt die größere von zweien, nennt man den Minuend und die andere, oder die kleinere, den Subtrahend. Die Zahl, welche nach dem Abziehen übrig bleibt, wird entweder Rest oder Differenz (Unterschied) genannt.

§. 42.

Beim Subtrahiren ist das mechanische Verfahren Folgendes:

„Man setze unter den Minuend den Subtrahend mit „gleicher Benennung wie bei der Addition, unterstreiche den „letztern und fange mit der Vergleichung der Ziffern des Sub„trahends gegen die des Minuends bei den Einern an. Um wie „viel Einheiten nun die obere Ziffer größer ist, als die untere, „zeige man als Rest unter dem gezogenen Strich in der ersten „Ordnung durch die entsprechende Zahl an. Ebenso verfahre „man mit den Ziffern der Zehner, Hunderter u. s. w. Solche „Ziffern des Minuends, unter welchen keine des Subtrahends „sich vorfinden, setzt man unverändert in ihrer Ordnung zum „Rest."

Ein Beispiel möge Gesagtes verständlicher machen: Es soll 6958 um 4047 vermindert, oder 4047 von 6958 abgezogen werden, was in der Zeichensprache 1) 6,958 — 4,047 heißt.

Ansatz 6,958 Minuend
4,047 Subtrahend
2,911 Rest.

2) 76,402 — 300;

76,402
300
76,102 Rest

3) 188,599 — 7,069.

188,599
7,069
181,530 Rest.

Im ersten Beispiele erhält man den Rest, wenn man verfährt:

„7 von 8 bleibt eine Einheit, welche in ihre Ordnung „unter den Strich gesetzt wird; 4 von 5 Zehner bleibt 1 Zeh„ner, den man gleichfalls in seiner Ordnung andeutet; 0 oder „keine Hundert von 9 bleiben 9 Hundert; 4 Tausend von 6 „Tausend weggenommen bleiben 2 Tausend."

Sind nun beide letzteren Ueberschüsse zu den vorigen in ihren Ordnungen unter den Strich gesetzt, so bildet die entstandene Zifferreihe die Zahl des Restes.

Im 2ten Beispiele hat der Minuend Tausender, während im Subtrahend keine vorkommen; daher dieselben keine

Verminderung erleiden und unverändert dem Rest anheimfallen.

Das 3te Beispiel zeigt gleiche Einheitsziffern, d. h. solche haben keinen Unterschied, weßhalb für solche Fälle eine 0 in den Rest gesetzt wird.

§. 43.

Jeder Minuend der vorigen Beispiele hatte entweder größere oder doch gleiche Ziffern gegen die gleichnamigen des Subtrahends; es kommt jedoch häufig vor, daß die des letztern größer sind, in welchem Falle zu der betreffenden Ziffer im Minuend zehen Einheiten ihrer Ordnung addirt werden müssen, welche man in der ihr links in der 10fach höheren Ordnung stehenden, durch Verminderung solcher um 1 entlehnt. Dergleichen Wegnahme einer Einheit zeigt man durch einen oberhalb der Ziffer beigesetzten Punkt an, damit ihr verkleinerter Werth bei der Operation nicht vergessen wird. Z. B. 155,703 — 49,812.

Ansatz 155,703
49,812

105,891

Hier soll nach dem geschehenen Abzug der Einer, Ein Zehner von 0 Zehner weggenommen werden, was unmöglich wäre; da aber, wie bekannt, jede Einheit einer links folgenden Ordnung immer 10 Einheiten der in Betrachtung stehenden Ziffer enthält, so nehme man in unsrem Beispiele von 7 Hundert einen Hunderter oder zehen Zehner hinweg, deute es durch einen Punkt bei 7 an und addire solche zu der vorhandenen Zehnerzahl des Minuends, die aber hier 0, daher die erhaltene Summe der Zehner nur zehn ist. Nach diesem kann man 1 Zehn des Subtrahends von 10 Zehn des Minuends abziehen, wodurch man zum Rest 9 erhält. Hierauf wären 8 Hundert von den auf 6 reduzirten Hunderten des Minuends wegzunehmen, was wieder nicht seyn kann, daher man von dem 5 Tausender desselben Einen entlehnt und diesen als 10 Hun-

dert zu 6 addirt, was 16 Hunderten giebt, von denen 8 abgezogen 8 für den Rest bleiben. Ebenso verhält es sich mit 9 Tausend des Subtrahends, welche größer als die vorhandenen 4 des Minuends sind; aber einen Zehntausender von dem vorangehenden 5er weggenommen und zu 4 hinzugethan, geben 14 Tausender und lassen nach dem Abzug 5 übrig. Auf diese Art wird in allen dergleichen Fällen, die Ordnung mag heißen wie sie will, verfahren.

§. 44.

Es kann auch die Aufgabe lauten, daß von mehreren gegebenen Zahlen wieder mehrere abgezogen werden sollen; in diesem Falle muß vorher von jeder Gattung die Summe gesucht, d. h. die unter gleichen Bedingungen stehenden und aus diesem Grunde mit gleichen Zeichen versehenen, zusammen gezogen werden; worauf mit den entsprechenden Summen das Verfahren wie vorhin ist.

z. B. es sollen von den Zahlen:

16,805 + 4,059 + 119,537 + 199 + 4,008

folgende abgezogen werden:

— 45,003 — 567 — 98 — 30,000 — 104,

so erhält man durch die Addition der Zahlen mit gleichen Zeichen:

+	16,805	—	45,003
+	4,059	—	567
+	119,537	—	30,000
+	199	—	104
+	4,008		
		—	75,674 den Subtrahend
+	144,608 den Minuend		

daher + 144,608
— 75,674

\+ 68,934 Rest.

§. 45.

Aus Veranlassung dieses Beispieles mag schon hier von der Bedeutung der Zeichen + (plus, mehr) und — (minus,

weniger) das Nöthigste gesagt werden. Es ist allgemeine Uebereinkunft, diejenigen Zahlen, vor denen + steht positive, und die, vor welchen — steht, negative Zahlen zu nennen. Die Bedeutungen dieser zwei Zeichen sind einander entgegengesetzt, indem das eine als Merkmal der Vermehrung und das andere zur Verminderung verwendet wird. Jedenfalls haben aber dieselben nur bei Betrachtung gleichartiger Größen und deren Verhältniß zu einer bestimmten Voraussetzung Sinn. Denn nimmt man an, es sollen Vermögenstheile mit + und Schuldigkeiten mit — bezeichnet werden, so könnte man das reine Vermögen nur dadurch erfahren, daß man die Summe der letztern von der Summe der erstern abzieht. Ebenso wäre es bei Vor- und Rückwärts-gehen. Daher ist es falsch, zu behaupten, eine negative Zahl seye weniger als Nichts, und 0 der Gränzpunkt zwischen positiv und negativ; denn eine Zahl ist immer etwas, nur die Beziehung der Gegenstände, welche sie ausdrückt, kann verschieden seyn; solches ist wieder am Leichtesten durch Schulden zu erklären, welche bei einem andern Vermögen heißen müssen; deßhalb die gleiche Zahl und der gleiche Werth sowohl + als auch — vor sich haben kann, je nachdem dieselben in verschiedenem Sinne genommen werden. Man sehe also die Zeichen nie als einen Werth, sondern als eine Benennung an.

§. 46.

Hat man zwei Zahlen, wovon eine positiv und die andere negativ ist, und man will die Wirkung der einen auf die andere wissen, so ziehe man die kleinere von der größern ab und setze dem Rest das Zeichen der größern vor. Der Beweis hievon ist gewiß sehr einfach: denn bezeichnet man, wie schon gesagt, das Vermögen mit + und nimmt an, solches betrage mehr als die vorhandenen Schulden, deren Zahl mit — angedeutet wird, so ist es natürlich, daß ein Ueberschuß an Vermögen vorhanden seyn muß und umgekehrt, demnach der Rest von der Gattung des Größern ist, was durch das nämliche Zeichen ausgedrückt wird.

§. 47.

Soll man von zwei Zahlen eine dritte abziehen, welche kleiner iſt als eine der vorigen, ſo könnte man mit der größern allein den Reſt ſuchen und die andere zu dieſem addiren, um das wahre Facit zu erhalten, z. B.

$$(45 + 9) - 27 = 45 - 27 + 9 = 18 + 9 = 27,$$

iſt eben ſo, wie wenn man 45 + 9 = 54 addirt und hierauf 27 abgezogen hätte, wodurch ebenfalls 27 gefunden wird.

Auf dieſem Satz beruht die Ausführung der Subtraktion durch die decadiſchen Complemente, deren man ſich mit Vortheil in den Fällen bedient, wo mehrere Zahlen abgezogen werden ſollen, weil nach ihrer Bildung nur noch eine Addition Statt findet. Für eine Controlle ſind ſie gleichfalls tauglich.

Das decadiſche Complement einer Zahl iſt nämlich deren Ergänzung zu der Einheit, welche in einer beliebig höhern Ordnung als die höchſte Ziffer der Zahl ſelbſt ſtehen kann, oder der Reſt der Zahl mit der angenommenen Potenz des einfachen Zehners; z. B. für die Zahl 7,549: muß zu 10....0,000 die Ergänzung geſucht werden, um ihr dekadiſches Complement zu erhalten; was nun ſehr leicht zu bewerkſtelligen iſt, wenn man nach und nach jeder Ziffer von 7,549 ſo viel aufzählt, daß daraus 10.....0,000 entſteht; man wird 99.....2,451 nöthig haben; alſo dec. Compl. von 7,549 = 99....92,451. Das Gleiche würde gefunden worden ſeyn, wenn man 7,549 von 10.....0,000 abgezogen hätte. Soll nun von einer Zahl eine kleinere weggenommen werden, ſo denkt man ſich zur größern den einfachen Zehner ihrer höchſten Ziffer addirt, ſubtrahirt von dieſer Zehnerzahl den Subtrahend und addirt den Reſt, welcher gleich dem decad. Compl. des Subtrahends iſt, zu dem Minuend; endlich werfe man von der erhaltenen Summe wieder 10 der höchſten weg, ſo iſt die Subtraktion geſchehen; z. B. was iſt der Reſt von

6,848 — 1955. Der einfache Zehner von 6,000 iſt 10,000 ſolchen zu 6,848 addirt giebt:

6,848 + 10,000, und nun von 10,000 den Subtrahend abgezogen, oder sein decad. Compl. genommen, läßt 8,045, was zu dem Minuend addirt 14,893 wird. Weil aber hierin 10,000 zu viel enthalten sind, so nimmt man solche wieder dadurch weg, daß man die vordere Ziffer 1, welche ja auch 10,000 bedeutet, wieder entfernt. Die Zusammenstellung wäre:

6,848 + 10,000 — 1955 = 6,848 + 8045 — 10,000 gleich 14,893 — 10,000 = 4,893.

Was bei diesem Verfahren anfänglich addirt wurde, wird später wieder weggeworfen, also nichts Fremdartiges in Rechnung behalten; daher die Richtigkeit dieses Kunstgriffs.

§. 48.

Beispiele.

1) 2'600,314 — 413,608 = 2'186,706.
2) + 3490 + 78,146 + 978 — 44,538 — 6,813 = 29,263.
3) 282,000 — 230,000 = 52,000 u. s. f.

Anmerk. Es wäre zwar nicht sehr nothwendig, doch sey es zum Ueberflusse, noch zu bemerken, wenn im Minuend über eine Null hinweg entlehnt werden muß, diese von den dadurch erhaltenen 10 wieder 1 abgiebt und daher immer 9 gilt.

---

§. 49.

b) Durch Dividiren.

Würde gefordert, eine kleinere Zahl von einer größern so oft abzuziehen, als es möglich ist; oder mit andern Worten, die Zahl zu suchen, welche anzeigt, wie oft die letztere die erstere enthält, oder aber, wenn angegeben werden soll, in wie viel der kleinern Zahl gleiche Theile sich die größere Zahl zerlegen läßt, so wäre die Behandlung der Auflösung nach der so eben betrachteten Methode höchst zeitraubend und dabei der Weitläufigkeiten halber sehr unsicher. Man ist für diesen Fall auf ein Verfahren gekommen, welches in eben dem Verhältniß zum Subtrahiren, wie früher die Multiplication zum Addiren, steht und wird Dividiren (Theilen) genannt.

Man könnte solches auch die Umkehrung der Multiplication nennen; denn wie hier die Summe der mehrfachen Additionen einer Zahl durch eine Vermehrung dieser mit der Vielfachszahl als Multiplicator gefunden worden ist, so soll dort zu einem bekannten Faktor aus der gegebenen Summe als Produkt, der andere gesucht werden.

Z. B. man will wissen, wie oft 3 in 15 enthalten ist; oder wenn man 3 als Faktor betrachtet, wie groß der andere seyn muß, damit ihr Produkt 15 gebe.

Solches wird man in dem pythagoräischen Rechentisch finden, wenn man in der Querlinie der 3 bis auf die Zahl 15 geht und über dieser die oberste Zahl in ihrer Vertikalzeile nimmt, welche 5 ist.

§. 50.

Erklärung. Bei der Division heißt der bekannte Faktor: Divisor, die gegebene Zahl der: Dividend und der gefundene Faktor: Quotient.

§. 51.

Die mechanische Behandlung des Dividirens besteht in Folgendem:

„Man schließe die gegebene Zahl, oder den Dividend „zwischen zwei Vertikalstriche ein; vor den Strich links, mit „der Zahl in gleicher Linie, setze man den Divisor und auf „gleiche Art hinter den Strich rechts den gefundenen Quotien„ten. Multiplicire letzteren mit dem vorigen, setze das Pro„dukt unter den Dividend und subtrahire Selbiges von Die„sem. Bleibt kein Rest, so ist die Division vollendet und „heißt eine reine, d. h. der Divisor mißt den Dividend ge„nau; bleibt aber ein Rest, so ist solcher entweder größer „oder kleiner als der Divisor; im ersten Falle wird mit die„sem abermals dividirt und so fortgefahren bis zuletzt kein „Rest mehr vorhanden ist und sich die Division ebenfalls als „eine reine erweißt; oder aber: im andern Falle heißt die „Division eine unreine.“

§ 52.

Vorderhand wollen wir uns nur mit den reinen Divisionen befassen und das Beispiel annehmen, es solle 360 durch 2 dividirt werden; man setze:

2|360|, worauf es heißt:

„2 ist in 300—100mal und etwas darüber enthalten *) (denn „200 mal 2 gäbe ja 400); weßwegen 100 in den Quotienten „gebracht, mit 2 multiplicirt, das Produkt unter den Divi„denden gesetzt und von solchem abgezogen, man den Rest 160 „erhält. In diesem Rest steckt aber der Divisor 2 noch mehrere„mal und zwar, da er 16 Zehner groß ist, 8 Zehner oder „80 mal, welche Zahl noch zu dem Quotienten addirt werden „muß. Multiplicirt man nun wieder 80 mit 2 und bringt „das Produkt 160 unter den letzten Dividenden, so zeigt es sich, „daß die beiden letzten Zahlen einander ganz gleich sind, und „somit nichts übrig lassen, wenn man die eine von der an„dern abzieht; daher die Division vollendet und der erhaltene „Quotient = 100 + 80 oder 180 ist.“

Die Figur hiefür ist:

Divisor	Dividend		Quotient
2	360	100 + 80 = 180.	
	−200		
	160		
	160		
	0		

§. 53.

Will man sich überzeugen, ob wirklich der erhaltene Quotient 180 der andere Faktor mit 2 zu dem Produkt 360 ist, so darf man solche nur wirklich multipliciren, um sogleich einzusehen, daß 2 × 180 = 360 macht.

§. 54.

Ein mehr zusammengesetztes Beispiel wäre:

*) Es muß jedesmal das nächst kleinere Produkt genommen werden, wenn sich kein Gleiches mit dem Dividend vorfindet.

66,384 : 36 (d. Zeichen: heißt divid. durch)

Ansatz 36 | 66,384 | 1000 + 800 + 40 + 4 = 1844.
—36,000

30384 d. i.
—28800

= 1584 36 × 1844 = 66,384.
1440

= 144
144

0

Aus diesem wie aus dem vorhergehenden Beispiele ersieht man, daß die Ordnung der ersten Ziffer des Quotienten durch das erste Produkt mit dem Divisor, in Beziehung auf den Dividend, bestimmt wird*). Bei größern Zahlen des Divisors ist es sehr zweckmäßig, sich vor der Division ein Täfel'chen der verschiedenen Vielfachen desselben von 1 bis 9 zu entwerfen, weil daraus im Augenblicke der Faktor, welcher nie die Ziffer 9 übersteigen kann, für das erforderliche nächst kleinere oder gleiche Produkt zu ersehen ist, und nicht durch Probiren verschiedener Multiplicatoren, wobei Anfänger meistens den Passenden zuletzt finden, so viel Zeit verloren geht; z. B.

35,912'654,480 : 368 oder $\frac{35,912'654,480}{368}$

*) Nämlich, die erste Ziffer des Quotienten muß von der gleichen Gattung oder Ordnung seyn, von welcher die Einheitszahl der höchsten Ziffern des Dividenden ist, in denen als Zahl betrachtet, der Divisor erstmals enthalten seyn kann. Im vorstehenden Beispiele wäre es nicht möglich, die 6 Zehntausender durch 36 in ihnen gleichartige ganze Zahlen zu zerlegen; wohl aber ist dieses mit 66 Tausender der Fall, welche 36 wenigstens 1000 mal enthalten; daher solches die erste Ziffer des Quotienten.

so ist der Tarif:

mal			
1 ×	368 =	368	und dieses Täfel'chen wird so-
2 ×	" =	736	gar mit großer Leichtigkeit ver-
3 ×	" =	1104	fertigt; denn nimmt man von
4 ×	" =	1472	dem einfachen Divisor 368 zu-
5 ×	" =	1840	nächst das Doppelte, so giebt
6 ×	" =	2208	dieses zu jenem addirt das 3fa-
7 ×	" =	2576	che; das doppelte 2fache ge-
8 ×	" =	2944	nommen: das 4fache; das 4fa-
9 ×	" =	3312	che und 1fache addirt das 5fa-

che; das 3fache verdoppelt, das 6fache u. s. f. und nun ist die Division leicht auszuführen, als:

```
368 | 35,912'654480 | 90000000 + 7000000 + 500000 +
    |-33 120 000000 |
    -----------------
      2792654480      + 80000 + 8000 + 700 + 30 + 5 =
     -2576000000
     -----------
       216654480      = 97'588,735
      -184000000
      ----------
        32654480
       -29440000      368 × 97588735 = 35912654480
       ---------
         3214480
        -2944000
        --------
          270480
         -257600
         -------
           12880
          -11040
          ------
            1840
           -1840
           -----
           Rest ø
```

§. 55.

Aus dem bisher gezeigten Gange der Division wird man ersehen haben, daß von den, nach dem ersten Produkte des Divisors folgenden Ziffern, nur eine nach der andern im Reste nöthig wird, um mit solchem einen neuen Dividend zu

bilden *), daher es unterlassen werden kann, sie alle schon Anfangs vom Dividend in den Rest zu setzen. Eben so einleuchtend wird es seyn, daß die erste Ziffer des Quotienten von der nämlichen Ordnung, wie die letzte des ersten Produkts ist, und die übrigen nach der Reihe der Divisionen, oder der Abnahme der Ziffern im ursprünglichen Dividend, von derselben an bis zur Einheit hinunter, stufenweise abnehmen und in der Zusammenstellung in sich selbst die zuständige Ordnung ihres Werths, auch ohne die wiederholten Nullen anzeigen. Die vorige Division ließe sich sonach vereinfachen wie folgt:

```
                 368 | 35912654480 | 97'588,735
                     | 3312.......  |
                     = 2792......
                       2576.....
                       = 2166....
                         1840....
                         = 3265...
                           2944...
368 × 97'588,735 =         = 3214..   = 35,912'654,480
                           2944..
                           = 2704.
                             2576.
                           = 1288.
                             1104.
                             = 1840
                               1840
                               ====
```

§. 56.

In Beziehung auf den Gebrauch des entworfenen Tarifs zu diesem Exempel stehe noch hier: der Divisor 368 enthält 3 Ziffern, solche sind aber zusammen größer als die 3 ersten des Dividends 359, daher dieselben nicht Einmal in diesen

*) Weil von der Ordnung der ersten Ziffer des Quotienten an, alle Ordnungen bis zur Einheit rückwärts vorkommen müssen, so kommt auf jede folgende im Dividenden eine im Quotienten.

enthalten seyn können. Nun nehme man noch eine Ziffer des Dividends weiter in Betracht, also daß die Zahl = 3591 *) wäre, und suche in dem Tarif ein dieser Zahl entsprechendes Produkt des Divisors. Ein gleiches kann zwar nicht gefunden werden, aber das höchste mit 9 muß das nächst kleine seyn, deßhalb man den Faktor 9 in den Quotienten und 3312 unter die 4 ersten Ziffern des Dividends setzt. Nach dem Abzug bleiben 279, welche mit Anhängung der weitern Ziffer 2 des Dividends wieder ein Vielfaches vom Divisor geben und zwar nähert sich selbigem in dem Tarif das Produkt mit 7 oder 2576 am nächsten; sonach setze man 7 neben 9 in den Quotienten und 2576 unter 2792, ziehe das Untere vom Obern ab und ergänze den Rest 216 wieder mit der folgenden Ziffer 6 des Dividends zu einem Vielfachen des Divisors. Wie vorhin fahre man nun mit den Divisionen fort, bis zur letzten Ziffer.

Anmerk. Indem man einem Reste die folgende Ziffer im Dividenden anhängt, so wird die Zahl des Restes mit 10 multiplicirt und um die Einheiten derselben vergrößert. Zu gleicher Zeit hat aber die neue Zahl einen zehnmal geringern Werth erhalten, weßhalb ihr Quotient mit dem Divisor von der nämlichen Art, d. h. eine Ziffer seyn muß, welche in der zehnfach niedern Ordnung steht als der vorhergehende. Aus diesem läßt sich leicht die Zifferreihe des ganzen Quotienten erklären.

§. 57.

Wäre es vorgekommen, daß, nachdem einem Reste eine weitere Ziffer angehängt worden, die entstandene Zahl noch kleiner ist, als der Divisor, so wird in den Quotienten eine 0 gesetzt und der Zahl eine weitere Ziffer angehängt; z. B. 233,092 : 76.

---

*) Diese Zahl bedeutet Zehner von Millionen, darum auch der Quotient von der Art seyn muß.

76	233,092	3067
	228...	
	509.	
	456	
	532	
	532	
	ø	

76 × 3067 = 233,092.

Tarif:

1) . . . 76
2) . . . 152
3) . . . 228
4) . . . 304
5) . . . 380
6) . . . 456
7) . . . 532
8) . . . 608
9) . . . 684

Das 3fache von 76 entspricht den 3 ersten Ziffern des Dividends am meisten, und läßt 5 zum Rest; hängt man solchem die nächste Ziffer 0 des Dividends an, so hat man die Zahl 50, in welcher 76 noch nicht Einmal enthalten ist *), daher man die weitere Ziffer 9 anhängt und hierauf 509 erhält, welchem das 6fache von 76 mit 456 entspricht. Das Uebrige ist wie vorher.

§. 58.

Es kann in gewissen Fällen die Division schwierig erscheinen, und dennoch läßt sie sich auf eine sinnreiche Art, ohne Hülfe eines Tarifs, sehr leicht ausführen. Derlei Fälle sind, wenn die Ziffern des Divisors sehr groß und nahe an einem vollen Hunderter, Tausender u. s. w. sind, z. B. 97, 198, 299, 399, 1995 u. s. f.

Was nun solchen Zahlen zu dem nächsten vollen Hunderter, Tausender ꝛc. abgeht, addirt man diesem Hunderter, Tausender ꝛc. selbst zu, und nimmt die hiedurch entstandene Zahl zum Divisor; also für die obigen Divisoren: 105, 202, 301, 404, 2005 u. s. f. und verfährt im Uebrigen wie sonst, nur daß man das Produkt des jeweiligen Quotienten mit der letzten Ziffer des neuen Divisors zu dem Dividend addirt, anstatt subtrahirt. Es seye 838565 : 97, hier fehlen dem Divisor 97 noch 3 zu 100; das Fehlende zu diesem addirt giebt 103 den neuen Divisor, und nach Gesagtem ausgeführt:

*) Hier wird nun eine 0 in den Quotienten gesetzt.

$$
\begin{array}{r|l|l}
103 & \cancel{8}38565 & 8644\frac{97}{97} = 8645 \\
 & \cancel{8}24\ldots & \\
\hline
 & \cancel{6}25 & \\
 & \cancel{6}18 & \\
\hline
 & \cancel{4}36 & \underline{97 \times 8645 = 838565} \\
 & \cancel{4}12 & \\
\hline
 & \cancel{4}85 & \\
 & \cancel{4}12 & \\
\hline
 & 97 &
\end{array}
$$

2tes Beispiel: 1'121,076 : 198

$$
\begin{array}{r|l|l}
202 & 1121076 & 5661\frac{198}{198} = 5662 \\
 & 1010. & \\
\hline
 & = 1310 & \\
 & 1212 & 198 \times 5662 = 1'121,076 \\
\hline
 & = 1227 & \\
 & 1212 & \\
\hline
 & = 396 & \\
 & 202 & \\
\hline
 & 198 &
\end{array}
$$

Das Addiren (des Produkts aus der letzten Ziffer des Divisors und dem zugehörigen Quotienten) muß man daraus erklären:

„Der neue Divisor ist um das Doppelte seiner letzten „Ziffer größer, als der eigentliche Divisor; denn zu demselben „hat man ja schon so viel addiren müssen, als sie anzeigt, um „den nächsten Hunderter u. dgl. zu erhalten, und hierauf ist „dieser selbst wieder um sie vermehrt worden; daher ist auch „das Produkt des Quotienten mit dem neuen Divisor um das „doppelte Produkt desselben mit der letzten Ziffer von diesem „größer, als dasjenige, worin der wahre Divisor enthalten ist. „Man würde sonach durch Subtrahiren das doppelte Produkt „des Quotienten mit der letzten Ziffer des Divisors zu viel „wegnehmen, weßhalb man nur die Hälfte davon wieder addi„ren dürfte, um die andere aufzuheben. Diese Hälfte ist aber „in der Multiplication der letzten Ziffer des Divisors mit dem „Quotienten ausgedruckt, daher man solches Produkt addirt.“

§. 59.

Es ist nun Alles erschöpft worden, was über die reinen Divisionen in einem Handbuche, wie das gegenwärtige, gesagt werden kann, und es würden hierauf mehrere Beispiele zur Uebung folgen, wenn solche nicht aus denen in der Multiplication §. 39 gegebenen, entlehnt werden könnten; indem man die dortigen Produkte zu Dividenden und von den zugehörigen Faktoren je einen zum Divisor macht, worauf die Berechnung je den andern Faktor zum Quotienten ergeben muß. Von den unreinen Divisionen, d. h. solchen, in welchen der Divisor nicht genau im Dividend enthalten ist, und von diesem ein Rest bleibt, seye daher noch so viel die Rede, als es die Unbekanntschaft mit den Brüchen zuläßt.

§. 60.

Hat man mit dem Divisor den Dividend so weit getheilt, daß die Einheitsziffer des letzteren zur Erforschung der Einheitsziffer des Quotienten in Betracht gekommen ist, und das Produkt des Divisors mit der genannten Quotientenzahl läßt noch einen Rest, kleiner als der Divisor, so hat man eine unreine Division. — Will man den Dividend wieder herstellen, so muß der Rest zu dem Produkt aus dem Divisor und Quotienten addirt werden; z. B. 6704896 : 45.

	Dividend	Quotient
Divisor 45	6704896	148997
	45....	
	220...	
	180...	
	= 404..	
	360..	
	= 448.	
	405.	
	= 439	
	405	
	= 346	
	315	
	= 31 Rest.	

Probe:

148997 Quotient
45 Divisor
744985
595988
6704865 Produkt
+ 31 Rest
6704896 Dividend

§. 61.

Von den verschiedenen Merkmalen, an denen man erkennt, mit welcher Zahl eine andere genau getheilt werden kann.

1) Jede Zahl, deren Einheitsziffer gerade ist, kann durch 2 getheilt werden; denn letztere selbst muß aus Zweiern zusammengesetzt seyn, weil 2 die erste gerade Zahl ist und die übrigen Geraden je um 2 Einheiten von einander abstehen. Die vorangehenden Zehner, Hunderter u. s. w. sind ohnedieß gerade, weil sie aus lauter Zehner bestehen und die Zahl 10, um eine Einheit von der ungeraden 9 verschieden, also gerade ist.

2) Jede Zahl, an deren Ende eine 0 befindlich, ist durch 10 und 5 theilbar, weil ja die 0 anzeigt, daß die übrigen Ziffern um 10 vermehrt seyn sollen und 5 die Hälfte von 10 ist.

3) Jede Zahl, die in ihrer ersten Ordnung 5 hat, kann durch 5 dividirt werden. Sie ist nämlich durch sich selbst theilbar und die ihr vorgehenden Ziffern bestehen aus Zehner, wovon sie ja die Hälfte ist.

4) Jede Zahl, die am Ende zwei 00 hat, läßt sich durch 100 theilen, aus dem ähnlichen Grunde wie 2); aber auch durch 10, durch 5, durch 20 (weil 10 Zehner durch 2 theilbar), durch 50, durch 4 (weil 10 durch 4 dividirt 2 zum Rest läßt und daher von 10 Zehner, 10 Zweier oder 5 Vierer übrig bleiben); und endlich durch 25, da 100 aus 5 Zwanzigern besteht; nimmt man nun einen davon, zerlegt ihn in 4 Theile, und vermehrt jeden der 4 übrigen 20 mit einem dergleichen, d. i. mit 5, so hat man wieder 100.

5) Jede Zahl, die drei 000 neben sich hat, kann durch 1000, so wie durch alle so eben aufgeführten Zahlen u. s. f. getheilt werden.

6) Betrachtet man die Ziffern einer Zahl ohne auf die Bedeutung ihrer Ordnungen Rücksicht zu nehmen, wie Ein-

heitszahlen und ihre Summe ist durch 9 theilbar, so ist es auch die Zahl selbst; denn: jede Einheitszahl, wenn sie nicht ein Neuner ist, enthält 9 Null mal, und läßt einen ihr gleichen Rest; ferner bleibt bei den Zahlen 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. jeder Zeit 1 zum Rest, so wie bei den Zahlen 20, 200, 2000, 20000 u. s. w. stets der Rest 2, bei den Zahlen 30, 300, 3000, 30000 der Rest 3 u. s. f., wenn sie nämlich durch 9 dividirt werden; daraus geht die Regel hervor, daß der Rest einer Division mit 9 in jeder Ordnung so viel Einheiten beträgt, als die Ziffer der Zahl anzeigt. Ist nun die Summe dieser Reste, oder, was gleichbedeutend ist, die Summe der einzelnen Ziffern einer Zahl ein Neunfaches, so muß auch die Zahl selbst ein Neunfaches seyn, d. h. sich durch 9 dividiren lassen. Hat man z. B. die Zahl 5689431, so macht die Summe ihrer Ziffern 36 aus, welches ein Vielfaches von 9 ist, sonach läßt sich die Zahl selbst durch 9 theilen.

7) Da die Zahl 3 das 3fache von 9 ist, so dividirt solche ebenfalls die Zahlen der oben genannten Art, aber auch diejenigen, deren Ziffer-Summe nur mit 3 theilbar ist. Der Beweis hiefür geht leicht aus dem Vorigen hervor.

8) Wenn man in einer Zahl, deren gerade Stellen Nullen sind, die Ziffern der ungeraden Stellen addirt und diese Summe durch 11 theilbar findet, so ist die Zahl selbst durch 11 theilbar. Denn nimmt man an, die Glieder der Reihe 1, 10, 10000 u. s. f. seyen nach und nach mit 11 dividirt worden, so wird der Rest jedesmal 1 seyn. Demnach läßt jedes Glied der Reihe 2, 200, 20000 u. s. f. den Rest 2 und die die der Reihe 3, 300, 30000 u. s. f. den Rest 3 u. s. w., das heißt: jede Ziffer mit einer geraden Anzahl Nullen und durch 11 dividirt, läßt eine Einheits-Zahl übrig, welche mit der Ziffer einerlei ist. Wird daher eine Zahl wie 7030408 durch 11 getheilt, so muß der Rest so groß seyn als die Summe aller Ziffern $7 + 3 + 4 + 8$, und dividirt man diese Summe wieder mit 11, so muß so viel übrig bleiben,

als der Rest der Zahl selbst beträgt. Läßt aber diese Summe keinen Rest, so ist die Zahl selbst durch 11 theilbar.

9) Hat eine Zahl in allen ihren ung'raden Stellen eine Null, und ist die Summe ihrer g'raden Stellen durch 11 theilbar, so ist es die Zahl selbst auch.

Beweis: Betrachtet man die Reihe 10, 1000, 100000 u. s. f., so fehlt ihren Gliedern immer entweder 1 um ein Vielfaches von 11 zu seyn, oder es bleibt jedesmal ein Rest von 10. Alle Glieder der Reihe 20, 2000, 200000 u. s. f. lassen zum Rest 9 und dessen Complement zu 11 ist 2. Ueberhaupt ist der Rest jeder Zahl, welche ungerade Nullen bei einer Ziffer hat, nach ihrer Division durch 11 so groß, als das Complement der Zahlziffer selbst zu 11. Wenn sonach eine Zahl wie 70504020 durch 11 dividirt wird, so betragen sämtliche Reste so viel, als die Ergänzungen zu 11 mit den Ziffern 7, 5, 4, 2 ausmachen; oder der gegebenen Zahl fehlen so viele Einheiten zu einem 11fachen, als die Summe der Ziffern 7 + 5 + 4 + 2 angiebt. Ist nun letztere Summe ein 11faches, so muß es auch die Summe der Reste, folglich die Zahl selbst seyn.

10) Jede Zahl kann als eine Summe zweier solcher Zahlen angesehen werden. So ist z. B. 574938 = 504030 + 70908, hieraus folgen nachstehende Regeln:

a) Wenn sowohl die Summe der geraden, als der ungeraden Stellen, jede für sich durch 11 theilbar ist, so ist es auch die ganze Zahl.

b) Wenn eine von beiden Summen für sich allein durch 11 theilbar, die andere aber untheilbar wäre, so ist die Zahl selbst durch 11 untheilbar.

c) Wenn jede dieser Summen durch 11 untheilbar ist, aber beide einen gleichen Rest lassen, so ist die Zahl durch 11 theilbar. Denn die Summe der geraden Ziffern ist der Zahl gleich, welche noch fehlt, damit die durch dieselben beschriebene Zahl ein Vielfaches von 11 seye; und die Summe der geraden Ziffern kann man als den Ueberschuß betrachten, welchen

die durch sie beschriebene Zahl über ein 11faches hat. Da nun beide Summen einander gleich sind, so findet Statt, daß eine Summe so viel übrig hat als der andern fehlen, d. h. daß die erstere die letztere zu einem Vielfachen von 11 ergänzt. Folglich ist in einem solchen Falle die ganze Zahl selbst durch 11 theilbar. Sind aber beede Reste ungleich, so ist die Zahl durch 11 untheilbar.

11) Jede Zahl, deren zwei letzte Ziffern 4er sind, läßt sich durch 4 dividiren.

12) Multiplicirt man die Zehnerziffer einer Zahl mit 2, addirt zu dem Produkte die vorhandene Einheitsziffer und die Summe ist durch 4 theilbar, so kann man die Zahl selbst durch 4 dividiren; z. B. 6094532. Hier ist $2 \times 3 + 2 = 8$ ein Vierfaches. Der Grund liegt darin, daß jeder Zehner mit 4 dividirt 2 Einheiten zum Rest läßt; multiplicirt man daher die Zehnerziffer mit 2, so erfährt man, wie viel Einheiten der Rest nach ihrer Division enthält. Macht dieses Produkt mit der vorhandenen Einerziffer ein Vierfaches, s. i. u. s. w. Jeder Hunderter, welcher der Zehnerziffer vorangeht, ist ohnedieß durch 4 theilbar.

13) Jede Zahl von 21 bis 189, deren übrige Ziffern das doppelte Produkt der Einheitsziffer sind, können durch 7 getheilt werden, weil 21 ein Siebenfaches ist.

$$\text{Z. B. } 126 = 21 \times 3 = 3 \times 7 \times 3.$$

Diese Lehren finden ihre beständige Anwendung bei den künftigen Rechnungsfragen.

§. 62.

Von dem Verfahren, die Richtigkeit der in den vorgetragenen Rechnungsarten erhaltenen Resultate zu prüfen.

I. Vermehrende Rechnungsart.

a) Beim Addiren kann man zur Probe, ob man nicht gefehlt hat, die sogenannte Neunerprobe anwenden, welche darin besteht, daß man die Ziffern der Gliedern nach und nach zusammenzählt, und aus der erhaltenen Summe die Neuner wegwirft. Bleibt ein Rest, so merke man sich diesen. Hierauf zähle man auch die Ziffern der Summe der Addition zusammen und nehme daraus ebenfalls die Neuner hinweg. Bleibt nun der gleiche Rest, wie bei den Gliedern, so kann man annehmen, daß die Addition richtig seye; denn nur ein seltener Zufall müßte es seyn, wenn in der Hauptsumme zwei Ziffern gerade so verwechselt wären, daß es keinen Einfluß auf die Ziffersumme hätte. Der Beweis für dieses Verfahren geht leicht aus der Betrachtung hervor, daß die Glieder, aus welchen die Addition besteht, eben so viel Neuner enthalten müssen als ihre Summe. Exempel:

1stes Glied:	360134	läßt 8	übrig
2tes "	56987	" 8	"
3tes "	14655	" 3	"
Summe =	431776	zus. 1	übrig

läßt 1 übrig; daher richtig.

Eine andere Probe besteht darin, daß man außer einem Gliede der Addition, vorzüglich dem letzten, die übrigen wieder aufs Neue addirt, und ihre Summe von der Hauptsumme abzieht; erhält man einen dem letzten Gliede gleichen Rest, so darf man annehmen, daß die Rechnung richtig ist.

Das obige Beispiel würde sonach controllirt:

1stes Gl.	360134	431776	Hauptsumme
2tes "	+ 56987	— 417121	
	417121	14655	3tes Glied.

b) Zur Probe über das Produkt der Multiplication kann wieder die Neunerprobe gebraucht werden, indem man 9 aus jedem Faktor besonders so oft auswirft, als es ganz darin enthalten ist, die erhaltenen Reste miteinander multiplicirt, und dieses Produkt abermals mit 9 dividirt. Ist nun der hieraus erhaltene Rest dem Reste gleich, welcher nach der Division des Hauptprodukts mit 9 bleibt, so kann man die Rechnung als richtig ansehen; z. B.

$$\cancel{3}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{9}43\cancel{1} \times \cancel{6}\cancel{9}5\cancel{3}2 = \cancel{2}\ \cancel{5}\ \cancel{6}\ \cancel{5}\ \cancel{3}\ 3\ \cancel{5}\ 1\ \cancel{6}\ \cancel{2}\ \cancel{9}\ \cancel{2}$$

bleibt $7 \times 7 = 49$

Neuner-Rest $= 4$ Rest $= 4$.

Eine zweite Probe besteht darin, mit einem Faktor der Multiplication in das Produkt zu dividiren. Erhält man zum Quotienten eine Zahl, welche dem andern Faktor gleich ist, so muß die Rechnung richtig seyn.

II. Vermindernde Rechnungsart.

a) Beim Subtrahiren läßt sich wiederum die Neunerprobe anwenden, und zwar so, daß der Rest aus dem Minuend gleich seyn muß dem Rest, welcher nach der Division mit 9 aus der Summe der Ziffern des Subtrahends und der Differenz bleibt.

$$\begin{array}{rl} \text{Z. B.} \quad \cancel{9}4\cancel{3}\cancel{1}0\cancel{6}\cancel{8} & \text{Rest} = 4 \\ -573376 & \\ \hline \text{Differenz} = 8857692 & \text{"} \quad = 4 \end{array}$$

Oder man addire den Subtrahend und die Differenz zusammen, so muß die Summe wieder den Minuend geben. Im nämlichen Beispiele wäre:

$$\begin{array}{lr} \text{Subtrahend} = & 573376 \\ \text{Differenz} = & 8857692 \\ \hline & 9431068 = \text{Minuend.} \end{array}$$

b) Die Neunerprobe wird bei der Division auf folgende Art angewendet: man schaffe die Neuner aus dem Divisor und Quotienten je besonders hinweg, multiplicire die erhalte-

nen Reste und dividire ihr Produkt, wenn es möglich wird, mit 9, so muß der neu entstandene Rest gleich seyn dem Rest des Dividends, nachdem aus solchem ebenfalls die Neuner ausgeworfen sind:

Z. B. 894189537 : 1497 = 597321
Neunerrest = 0 = 21 × 0 = 0

Anmerk. Soll irgendwo eine Null, mit welcher Zahl es seyn mag, multiplicirt werden, so muß o bleiben; denn etwas Null mal genommen ist Nichts.

Die andere Probeart für die Division, welche darin besteht, daß man den erhaltenen Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, damit der Dividend wieder entsteht, ist schon bei dieser Rechnungsart vorgekommen.

---

§. 63.

Von den Theilern der Zahlen.

Aus der ersten Entstehung der Zahlen kann man ersehen, daß das Vielfache der Einheit in jeder Zahl durch sie selbst ausgedrückt wird.

Die meisten Zahlen hätte man aber durch das Vervielfältigen einer andern Zahl erhalten können, wie in der Multiplication gezeigt wurde; und in dieser Beziehung besteht eine solche aus Faktoren und heißt zusammengesetzte Zahl.

Die zusammengesetzten Zahlen sind demnach wieder einer Zerlegung in ihre Elemente fähig.

Ist eine Zahl durch keine andere zu zerlegen, so heißt sie: einfache oder Primzahl.

Die Zahl 2 und die meisten ungeraden Zahlen gehören zu den Primzahlen, weil sie nur durch sich selbst dividirt werden können.

Jede zusammengesetzte Zahl kann in einfache oder Primzahlen zerlegt werden; denn sollten ihre ersten zwei Faktoren

selbst noch zusammengesetzte Zahlen seyn, so kann man solche wieder in ihre Theile zerfällen u. s. f., bis keine Division solcher, als durch sich selbst, möglich ist. Eine zusammengesetzte Zahl in ihre Faktoren zerfällen, heißt immer soviel als: diejenigen Primzahlen aufzusuchen, deren Produkt genau die vorgegebene Zahl ist.

Da jeder Faktor eines Produkts solches ohne Rest dividirt, oder genau etlichemal in ihm enthalten ist, so heißt er ein Maaß oder ein Theiler des Produkts oder der Zahl. Auf die gleiche Art sind also die Primzahlen die Maaße oder die Theiler der zusammengesetzten Zahlen.

Das größte Maß jeder Zahl ist sie selbst.

Eine Zahl, die zu gleicher Zeit in mehreren Zahlen genau enthalten ist, heißt das gemeinschaftliche Maaß dieser Zahlen; giebt es keine größere Zahl, die dieselben mißt, so heißt sie ihr größtes gemeinschaftliches Maaß.

Die Einheit ist das gemeinschaftliche Maaß aller Zahlen, wie schon Eingangs gesagt wurde.

Sind mehrere Zahlen mit einander zusammengestellt, und ist jede von ihnen eine zusammengesetzte Zahl, aber sie haben kein gemeinschaftliches Maaß, so heißen sie für diesen Fall: Primzahlen unter sich.

§. 64.

Es kommt nun häufig vor, daß es von Nutzen wäre, das gemeinschaftliche Maaß von zwei oder mehreren Zahlen zu erfahren; ehe wir aber den nächsten Weg kennen lernen, auf welchem man zu diesem Zwecke gelangt, so sollen vorerst die verschiedenen Formen aufgezählt werden, in denen sich die Zahlen zeigen können, die man zerlegen will.

1) Jede Zahl ist entweder eine Primzahl oder eine aus Primzahlen zusammengesetzte Zahl.

Nimmt man an, sie seye keine Primzahl, so bestehet sie aus Faktoren. Wären solche auch noch zusammengesetzt, so

lassen sie sich so lange theilen, bis man endlich auf Primzahlen kommt; z. B. 360 ist eine zusammengesetzte Zahl; der man aber nach §. 61 sogleich ansieht, daß sie durch 10 und 9 theilbar ist; zerlegt man sie in 10 Theile, so ist $360 = 36 \times 10$. Diese beiden Faktoren sind selbst zusammengesetzte Zahlen; denn man kann 10 wieder mit 5 theilen, woraus $360 = 36 \times 5 \times 2$ wird. Nun hat man zwei Theile 5 und 2, welche Primzahlen sind. Der Faktor 36 kann durch 9 zerlegt werden, wornach man erhält: $360 = 9 \times 4 \times 5 \times 2$. Endlich lassen sich noch 9 und 4 theilen und man hat $360 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 2$; lauter Primzahlen.

2) Jede Zahl, welche den Faktor eines Produkts mißt, ist auch genau in diesem Produkt selbst enthalten;

denn, wenn man sich den Faktor in die betreffende Zahl zerlegt denkt, multiplicirt zunächst den andern Faktor des Produkts mit dieser Zahl selbst und hierauf das erhaltene Vielfache mit dem Quotienten aus dem ersten Faktor, so hat man auf diese Art den ersten Faktor eigentlich im Produkt wieder gebildet. Weil nun besagte Zahl auch ein Faktor des Produkts seyn kann, so muß sie auch in diesem enthalten seyn; z. B. die Zahl 45 ist ein Produkt aus den Faktoren 9 und 5. Nun geht 3 in dem ersten Faktor 9 auf, demnach muß 3 auch im Produkt 45 aufgehen. Zerlegt man nämlich die 9 in ihre Faktoren, s. i. $9 = 3 \times 3$; deßhalb $45 = 9 \times 5 = 3 \times 3 \times 5$; also 3 ein Faktor des Produkts und muß darin aufgehen.

3) Eine Zahl, die in zwei andern aufgehet, ist auch genau in deren Summe enthalten.

Sind diese Zahlen durch den Theiler getheilt, so enthält natürlich jeder solche Theil gleich viel Einheiten. Vereinigt man nun die Zahlen zu einer Summe, so enthält diese ebenso viele Einheiten als alle Theile zusammen enthalten haben, und man kann sonach diese wiederum aus ihr bilden; z. B. die Zahl 5 geht in den beiden Zahlen 10 und 15 auf; die erste enthält 5 Einheiten 2 mal und die andere 5 Einheiten 3 mal.

Summirt man nun die Zahlen, so müssen sie zusammen 2 und 3 oder 5 mal 5 Einheiten geben. Hieraus sieht man, daß der Theiler keine Veränderung erleidet.

4) Eine Zahl, die in der Summe zweier Zahlen und in einer der beiden Zahlen selbst aufgeht, muß auch in der andern aufgehen.

Der Beweis hiefür ist der umgekehrte vom vorigen.

5) Wenn von zwei Zahlen die kleinere in der größern aufgeht, so ist die kleinere das größte gemeinschaftliche Maaß beider Zahlen.

Es ist schon gesagt worden, daß das größte Maaß einer Zahl sie selbst ist; also kann die angenommene kleinere Zahl kein größeres für sich und eben so wenig für die größere haben; demnach ist sie das größte gemeinschaftliche Maaß beider Zahlen.

6) Wenn von zwei Zahlen die kleinere in der größern nicht aufgeht, so kann das gemeinschaftliche Maaß von beiden nicht größer seyn, als der Rest, welcher sich bei der Division der größern durch die kleinere ergiebt.

Die größere Zahl besteht aus dem Produkte der kleinern Zahl in den Quotienten und aus dem Reste, oder sie ist die Summe des Produkts der kleinern Zahl in den Quotienten und des Restes. Ein gemeinschaftliches Maaß beider Zahlen wird nach 2) zunächst in dem Produkt der kleinern Zahl mit dem Quotienten aufgehen; da aber solches Produkt ein Summand mit dem Rest zur größeren Zahl ist, so muß das gemeinschaftliche Maaß auch in dem Reste aufgehen (nach 4), und dasselbe kann daher nicht größer seyn als der Rest.

Z. B. die beiden Zahlen seyen 75 und 36; dividirt man die erste durch die 2te, so erhält man zum Quotienten 2 und zum Rest 3; es ist sonach $75 = 2 \times 36 + 3$. Das ge-

meinschaftliche Maaß der beiden Zahlen 75 und 36 ist in dem Produkt 2×36 enthalten; da es aber auch zugleich ein Maaß von $2 \times 36 + 3$ seyn soll, so ist es nothwendig, daß es auch in 3 aufgehen muß und deßhalb nicht größer als 3 seyn kann.

7) *Wenn von zwei Zahlen die kleinere in der größern nicht aufgeht, jedoch der Rest in der kleinern, so ist der Rest das größte gemeinschaftliche Maaß der beiden Zahlen.*

Wenn der Rest in der kleinern Zahl aufgeht, so ist er auch in dem Produkt derselben mit dem Quotienten genau enthalten. In sich selber geht er ohnedieß auf, daher auch in der Summe: *Produkt der kleinern Zahl mit dem Quotienten + Rest*, d. i. in der größern Zahl. Da man aber so eben gesehen hat, daß zwei Zahlen kein größeres gemeinschaftliches Maaß haben können als den Rest, so ist er in diesem Falle *das größte*; z. B. die zwei Zahlen seyen 86 und 28. — 86 durch 28 dividirt giebt 3 zum Quotienten und 2 zum Rest. Dieser Rest geht in der kleinern Zahl 28 auf; aber auch in der Summe $3 \times 28 + 2$, d. h. der größern Zahl und ist das größte gemeinschaftliche Maaß der beiden Zahlen, weil keine größere in 2 aufgehen kann.

8) *Wenn von zwei Zahlen die kleinere in der größern und auch der Rest in der kleinern nicht aufgeht, so ist das größte gemeinschaftliche Maaß der kleinern Zahl und des Restes, auch das größte gemeinschaftliche Maaß der beiden Zahlen.*

Das gemeinschaftliche Maaß der kleinern Zahl und des Restes, muß auch das Produkt der kleinern Zahl in den Quotienten messen, daher auch die Summe von diesem Produkt und dem Reste; mithin auch die größere Zahl, und ist zu gleicher Zeit das größte gemeinschaftliche Maaß der beiden Zahlen; weil ein größeres in dem Reste nicht aufgehen könnte; z. B. es seyen die Zahlen 96 und 34:

34	96	2	Quotient
	68		
	28		Rest

für 34 und 28 ist nun das größte gemeinschaftliche Maaß = 2 und daher auch für die Zahlen 34 und 96.

§. 65.

Wenn nun zu irgend zwei Zahlen das größte gemeinschaftliche Maaß gesucht werden soll, so verfahre man auf folgende Weise:

1) Man dividire mit der kleinern Zahl in die größere; geht selbige in dieser auf, so ist die kleinere das größte gemeinschaftliche Maaß *) beider Zahlen (64. 5.);

z. B. zu 14 und 56, als 17 und 136 soll das GGM. gesucht werden:

14	56	4. GGM.		17	136	8. GGM.	
	56	von 14 u. 56			136	von 17 u. 136	
	0				0		

2) Geht die kleinere Zahl in der größern nicht auf, so dividire man die kleinere Zahl mit dem Rest; gehet nun solcher in der kleinern auf, so ist dieser Rest das GGM. (64. 7.)

z. B. 21	49	2			12	66	5		
	42					60			
GGM. = 7	21	3		GGM. = 6	12	2
von 21 und 49	21			von 12 u. 66	12	
	0				0	

3) Bleibt aber bei der zweiten Division auch wieder ein Rest, so dividire man mit solchem den letzten Divisor abermals und fahre so immer fort, bis man zuletzt auf einen Rest kommt, der im vorigen Divisor auf-

*) In Zukunft soll immer GGM. größtes gemeinschaftliches Maaß bedeuten.

geht, so ist dieser letzte Rest das GGM. der beiden ersten Zahlen [64. 8)].

Erhält man aber zum letzten Reste 1, so zeigt dieß an, daß die beiden gegebenen Zahlen kein anderes gemeinschaftliches Maaß haben als die Einheit, demnach Primzahlen sind.

Beisp.: das GGM. für 34 und 66 zu finden:

34	66	1
	34	
32	34	1
	32	
2	32	16
	32	

2 = GGM. v. 34 u. 66

Ferner: zu 176 und 284, 256 und 1388, so wie 125 und 365 das GGM. zu suchen.

176	284	1
	176	
108	176	1
	108	
68	108	1
	68	
40	68	1
	40	
28	40	1
	28	
12	28	2
	24	
4	12	3
	12	
0		

GGM. von 176 u. 284 = 4

256	1388	5
	1280	
108	256	2
	216	
40	108	2
	80	
28	40	1
	28	
12	28	2
	24	
4	12	3
	12	
0		

GGM. von 256 u. 1388 = 4

125	365	2
	250	
115	125	1
	115	
10	115	11
	10	
15		
10		
5	10	2
	10	

GGM. von 125 u. 365 = 5

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens geht aus dem Vorigen §. 64 hervor; wo der Rest das GGM. für das letzte Paar Zahlen war; demnach muß er es nach und nach durch alle bis zu dem ersten Paare seyn.

§. 66.

Wenn aber mehr als zwei Zahlen gegeben sind, zu denen das GGM. gefunden werden soll, so beginne man damit, sie nach ihrer Größe zu ordnen, nämlich so, daß man die kleinste zur ersten und die größte zur letzten nimmt. Hierauf suche man das GGM. der beiden ersten Zahlen. Hat man dieses gefunden, so sehe man es wieder als die erste Zahl an, und suche zu ihr und der dritten Zahl das GGM. Solches betrachte man abermals für die erste Zahl und suche zu ihr und der vierten das GGM., und fahre so fort, bis man mit allen gegebenen Zahlen zu Ende ist. Das GGM. des letzten Paares nun ist auch das GGM. aller gegebenen Zahlen.

Der Beweis liegt im Vorigen.

Z. B. Man soll das größte gemeinschaftliche Maaß zu 105, 60, 25, 135 suchen:

```
25        25|60|2          2tes 5|105|21        3tes 5|135|27
60          |50|                |10|                |10|
105         10|25|2              = 5                 35
135           |20|                5                  35
        1tes = 5|10|2             0                   0
                |10|
                 0
```

also ist 5 das GGM. aller gegebenen Zahlen.

Ebenso findet man es von 85, 119, 51, 153.

```
51        51|85|1          17|119|6          17|153|9
85          |51|            |102|             |153|
119         34|51|1          17|17|1            0
153           |34|            |17|
        1tes = 17|34|2         0
                |34|
                 0
```

hier ist 17 das GGM. aller gegebenen Zahlen.

Noch stehe das Beispiel, zu:

46, 115, 138, 92, 207, 161 das GGM. zu finden.

46
92
115
138
161
207

1tens
46 = GGM. 46|92|2
92
0

2tens = 23|46|2
46
0

3tens
GGM. 23|138|6
138
0

4tens
GGM. = 23|161|7
161
0

5tens
GGM. = 23|207|9
207
0

Also für diese Zahlen ist 23 das GGM.

§. 67.

Wenn zwei Zahlen gegeben sind, und man soll die kleinste durch sie meßbare Zahl finden, so können die gegebenen Zahlen entweder Primzahlen oder zusammengesetzte Zahlen seyn.

1) Wenn die gegebenen Zahlen zusammengesetzte Zahlen sind, so suche man vor Allem ihr GGM., dividire durch solches eine von beiden, und multiplicire mit dem erhaltenen Quotienten die andere Zahl, so ist das Produkt die kleinste Zahl, worin beide aufgehen *).

Der Beweis wird einfacher, wenn man vorausgehen läßt, die beiden Zahlen seyen durch das GGM. dividirt; denn multiplicirt man nun die erhaltenen Quotienten mit dem GGM., so wird das entstehende Produkt die kleinste Zahl seyn, in welcher die gegebenen genau enthalten sind. Z. B.

*) In Hauff's Arithmetik, aus welcher das Theilen hauptsächlich entlehnt ist, weil man hierüber nicht viel Besseres sagen kann, werden die gegenwärtigen Fälle etwas undeutlich behandelt.

man will die kleinste Zahl wissen, in welcher 6 und 28 aufgehen. Auf l. ihr GGM. ist 2; denn

$$\begin{array}{r|l|l} 6 & 28 & 4 \\ & 24 & \\ \hline 4 & 6 & 1 \\ & 4 & \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ & 4 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

nun beide Zahlen durch

GGM. =

2 dividirt giebt: $\frac{6,\ 28}{3,\ 14}$, hierauf das GGM. zwischen die Quotienten als Faktor gesetzt, erhält man: $3 \times 2 \times 14$. Aus dieser Figur geht nun Folgendes klar hervor: In dem Produkt dieser drei Faktoren ist 2×3 oder die erste Zahl 14 mal, und 2×14 oder die zweite Zahl 3 mal enthalten; also messen beide Zahlen 6 und 28 das Produkt genau, und in Betracht, daß bei ihnen keine stärkere Verringerung als durch das GGM. möglich war, so ist es offenbar, daß das Produkt $3 \times 2 \times 14$ die kleinste Zahl zu Anfangs stehender Bedingung ist. — Weil nun aber der erste Faktor des Produkts immer der Quotient von dem GGM. in die erste Zahl ist, und die zwei andern Faktoren die zweite Zahl hervorbringen, so kann man die Regel und das mechanische Verfahren allerdings dahin abkürzen, wie sie Eingangs dieses gegeben wurde.

2) Sind die gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich, so multiplicire man die eine durch die andere, und das Produkt wird die kleinste Zahl seyn, in welcher beide aufgehen.

Nach dem so eben Gesehenen ist Solches sehr klar; denn diese Zahlen haben kein anderes gemeinschaftliches Maaß als die Einheit. Verfährt man nun auf eine analoge Weise wie dort, so ist, wenn 7 und 13 die Zahlen sind, für welche

die, durch beide ausmeßbare kleinste Zahl gefunden werden soll:

7 und 13 durch ihr GGM. 1 dividirt, giebt 7 und 13; diese Quotienten mit dem GGM. multiplicirt, wird:

$7 \times 1 \times 13 = 91$ wie behauptet wurde.

§. 68.

Sind mehr als zwei Zahlen gegeben und man soll die kleinste Zahl finden, in welcher alle aufgehen, so ordne man vor Allem die gegebenen Zahlen nach ihrer Größe, indem die kleinste zur ersten gemacht wird; und hierauf suche man für die ersten zwei Zahlen die kleinste ausmeßbare Zahl, sehe solche wieder als die erste an, und verfahre mit ihr und dritten auf gleiche Art und so jedesmal bis zur letzten Zahl, so ist die, durch das letzte Paar Zahlen, kleinste ausmeßbare Zahl, auch die kleinste ausmeßbare Zahl von allen gegebenen Zahlen.

Der Beweis und die Auflösung beruhen auf dem bereits Gesagten; z. B. die kleinste Zahl zu finden in der die Zahlen 6, 54, 72 enthalten sind:

6|54|9, also 54 ist die kleinste Zahl,
|54|
=

welche 6 und 54 in sich ausmessen läßt; zu ihr und der 3ten 72 wieder die kleinste Zahl gesucht, in welcher solche aufgehen können, wird:

54|72|1 das GGM. von 54 und 72 ist sonach 18;
|54|
18|54|3 mit diesem 54 dividirt, giebt 3,
|54|
= und $3 \times 72 = 216$ die kleinste durch 6, 54 und 72 ausmeßbare Zahl.

2tes Beispiel: für die Zahlen 5, 6, 8, 9, 12 die kleinste ausmeßbare Zahl zu finden:

5 und 6, Primzahlen unter sich geben $5 \times 6 = 30$.

8|30|3 8 : 2 = 4 u. 4 × 30 = 120 kleinste Zahl
24|
6 8 1 für Ausmessung der 5, 6, 8.
6|
GGM. = 2|6|3
6|

9|120|13; $\frac{2}{3}$ = 3; 3 × 120 = 360
9| kleinste meßbare Zahl zu
30 5, 6, 8, 9.
27
GGM. = 3|9|3
9|

12|360|30; also 360 auch die kleinste ausmeßbare Zahl
360|
=

durch 5, 6, 8, 9, 12, weil sie dieses von dem letzten Paar Zahlen 12 und 360 ist.

---

§. 69.

Von den gebrochenen Zahlen oder Brüchen.

Bei den bisherigen Betrachtungen der Zahlen, hat man solchen keine Beziehung auf bestimmte Gegenstände gegeben, sondern man sah sie als eine Zusammensetzung mehrerer Einheiten an, die alle einerlei Bedeutung haben sollen, diese mag nun bestehen in was sie will. So lange diese Voraussetzung gilt, nennt man die Zahlen unbenannte Zahlen.

Wir wollen auch bei der gegenwärtigen Untersuchung über das Wesen der gebrochenen Zahlen jeden andern Begriff bei Seite setzen, als den: daß die Einheit Etwas in Zeit oder Raum für sich bestehendes, oder gedachtes Ganze seye.

Daß man zur Darstellung der verschiedenen Veränderungen, welcher Zahlen fähig sind, um die gegebenen Bedingungen zu erfüllen, durchaus keine andern, als Zahlnamen nöthig hat, ist leicht zu begreifen, so wie die Fruchtbarkeit eines all-

gemeinen Werthes: denn bei den Anwendungen darf man ja nur den Begriff der Einheit festsetzen, so erhält das Resultat den gleichen Namen. Das Uebrige wird ohne Einschränkung durch die Zahlen vollbracht.

§. 70.

Bis jetzt haben wir uns nur mit Zahlen befaßt, die sich von 1 an immer um diese Einheit selbst bis ins Unendliche vermehren können, und solche Zahlen heißen: ganze Zahlen.

Es soll nun aber auch untersucht werden, wie es sich mit geringern Werthen, oder Theilen der Einheit verhält; denn so klein man auch die Einheit annehmen will, so bleibt doch noch immer ein Spielraum zwischen 1 und Null übrig. Diejenigen Zahlen, welche zwischen diesen Gränzen liegen, nennt man gebrochene Zahlen oder Brüche.

Diese Benennungen mögen daher rühren, daß wie bildlich die Einheit bei ganzen Zahlen sich ausdehnt, solche bei ihrem Theilen eigentlich in sich selbst zusammengebrochen wird.

Auch für gebrochene Zahlen bleibt die Einheit das allgemeine Maaß.

So vielfach die Einheit vermehrt werden kann, eben so vielfach kann sie verkleinert werden; denn 0 ist von 1 eben so weit entfernt als ∞ *) (unendlich).

Die Verkleinerung der Einheit geschieht durch ihre Division mit ganzen Zahlen.

§. 71.

Bei der unreinen Division ist es vorgekommen, daß ein Rest übrig blieb, welcher kleiner als der Divisor ist. So lange aber dieser Rest nicht auch in die Theile des Divisors zerlegt wird, ist die Division nicht beendet; denn er ist ein Theil der Zahl, welche ihre Einheiten genau in Zahlen formi-

*) Die Einheit kann in so viele Theile getheilt werden, als es ganze Zahlen giebt.

ren soll, die dem Divisor gleich sind. Dieses kann nur dadurch geschehen, daß man sich sämtliche Einheiten der Zahl des Restes in so viele Theile getheilt denkt, als die Zahl des Divisors Einheiten anzeigt und hierauf den Rest als die Anzahl solcher Theile ansieht. In der Geltung aber des Rests für die Zahl, der durch den Divisor getheilten Einheiten ist auch der Quotient begriffen; denn auf welche Art die Einheiten einer Zahl auch getheilt sind, eben so ist sie selbst getheilt, weil sie ja aus denselben besteht.

Wenn also überhaupt eine kleinere Zahl durch eine größere dividirt werden soll, so entsteht eine Theilung der Einheit, und der erhaltene Quotient heißt ein Bruch.

§. 72.

Die Andeutung von der Division der Einheit durch eine ganze Zahl besteht darin: daß man unter den Einser einen Strich macht, der als Zeichen der Division gilt, und darunter die Zahl des Divisors setzt; z. E. 1 soll in 9 Theile getheilt werden, so ist Ein Theil $= \frac{1}{9}$. Diese Figur selbst nennt man auch Bruch.

Sollte aber 2 durch 9 dividirt werden, so denkt man sich 2 in seine Einheiten zerlegt und jede durch 9 dividirt, daß also $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{9}$ die zwei Quotienten wären; da es aber gleichartige Dinge sind, so kann man sie addiren und daraus erhält man zum Quotienten der Division $= \frac{2}{9}$.

§. 73.

Nach diesem wird man folgende Benennungen, die bei gebrochenen Zahlen angewendet werden, ganz geeignet finden:

1) die Zahl, durch welche die Einheit getheilt werden soll, und die unter solche gesetzt wird, heißt man den Nenner des Bruchs, weil sie außer der Theilung auch noch die Gattung, oder den veränderten Werth der Einheit ausdrückt. Also im vorigen Beispiele wäre die Zahl 9 der Nenner des Bruchs $\frac{1}{9}$.

2) Die Einheit, oder jedes Vielfache der Einheit, oberhalb des Strichs stehend, heißt der Zähler des Bruchs, eben weil dadurch angegeben wird, ob es Ein Theil oder wie viele Theile von denen seyen, in welche man sich die Einheit durch den Nenner getheilt denkt. Es ist also 1 der Zähler von dem Bruch $\frac{1}{9}$ und 2 der Zähler von dem Bruch $\frac{2}{7}$.

3) Aus der Erklärung schon geht hervor, daß bei Brüchen immer der Zähler kleiner seyn muß, als der Nenner; da es aber in den Rechnungs-Operationen öfters bequemer ist, auch Bruchformen unter andern Bedingungen ausnahmsweise zu gebrauchen, so nennt man zur Unterscheidung von solchen: diejenigen Brüche, deren Nenner größer ist als ihr Zähler; eigentliche Brüche, ächte Brüche.

4) Im Gegensatz zu diesen heißen Bruchformen, deren Zähler größer ist als ihr Nenner: unächte Brüche, uneigentliche Brüche, Afterbrüche.

5) Bei der Benennung eines Bruches wird voraus die Zahl der Theile oder der Zähler und hierauf die Art der Theilung selbst oder der Nenner ausgesprochen, z. B. $\frac{3}{5}$ heißt: drei Fünftheil, und zusammengezogen: drei Fünftel.

§. 74.

Je größer die Anzahl der Theile ist, in welche die Einheit zerlegt werden soll, desto kleiner muß ein einzelner Theil werden, und umgekehrt; d. h. je größer der Nenner der Zahl 1 ist, desto kleiner ist der Werth des Bruchs. Von den Brüchen $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{19}$ hat $\frac{1}{3}$ den größten und $\frac{1}{19}$ den kleinsten Werth. $\frac{1}{7}$ ist kleiner als $\frac{1}{3}$ und größer als $\frac{1}{19}$.

§. 75.

Vermehrt man den einfachen Zähler nach und nach um sich selber, so nimmt der Bruch immer größere Werthe an

und wird zuletzt wieder gleich der Einheit, wenn derselbe so groß geworden ist wie der Nenner.

Daraus geht hervor, daß bei Brüchen von einerlei Nenner derjenige den größten Werth hat, welcher den größten Zähler besitzt und umgekehrt, daß der kleinste Zähler dem kleinsten Bruch angehört; z. B. unter den Brüchen: $\frac{1}{14}$, $\frac{6}{14}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{12}{14}$ ist $\frac{1}{14}$ der kleinste, und $\frac{12}{14}$ der größte Bruch.

§. 76.

Aus dem Gesagten geht nun deutlich hervor, daß ein Bruch durch Multiplication seines Zählers mit irgend einer ganzen Zahl um so viel mal vergrößert wird, als diese Zahl Einheiten besitzt, und daß ein Bruch durch Multiplication seines Nenners mit einer ganzen Zahl, so viel mal vermindert wird, als diese Zahl Einheiten enthält.

Würden demnach Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerlei Zahl multiplicirt, so hebt eine Wirkung die andere auf; der Bruch verändert deßhalb seinen Werth nicht.

Umgekehrt, wenn der Zähler eines Bruchs durch irgend eine Zahl dividirt wird, so wird der Werth des Bruchs um so viel mal geringer, als die Zahl Einheiten enthält; und durch Division des Nenners eines Bruchs wird solcher um so viel mal vergrößert, als der Divisor Einheiten hat, darum:

Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerlei Zahl dividirt, so hebt eine Wirkung die andere auf oder der Bruch bleibt in seinem Werthe ungeändert.

Beispiele hierüber.

Der Bruch $\frac{4}{7}$ soll mit 2 multiplicirt, oder 2 mal vergrößert werden. Weil nun der Bruch auf zweierlei Art, einmal durch Vermehrung des Zählers, und das anderemal durch Division des Nenners beliebig vergrößert werden kann, so wäre: $\frac{4 \times 2}{7} = \frac{4}{7:2} = \frac{8}{7} = \frac{4}{\frac{7}{2}}$. Gewöhnlich zieht man die erstere Art der Vermehrung vor, weil bei der an-

dern meistens wieder ein Bruch im Nenner zum Vorschein käme. Soll aber der Bruch 2 mal verkleinert werden, so kann man entweder den Zähler mit 2 dividiren, oder aber den Nenner mit 2 multipliciren, also: $\frac{4:2}{7} = \frac{4}{7\times2} = \frac{4}{14}$. Hier zieht man aus dem vorigen Grunde das zweite Verfahren vor.

Wird nun der Zähler und der Nenner des Bruchs zu gleicher Zeit mit 2 multiplicirt, s. i. $\frac{4\times2}{7\times2}$, was so viel heißt, als: im Zähler sind 4 Zweier und im Nenner 7 Zweier enthalten, was ist der Quotient aus dem Nenner in den Zähler — Da solcher der nämliche seyn müßte, wenn es geheißen hätte, der Zähler hat 4 Einheiten und der Nenner 7 *), wie vielmal ist der Nenner im Zähler enthalten? so kann man die Zweier ganz weglassen und der Bruch wird also nicht geändert.

Auf eine gleiche Weise verhält es sich in dem Falle, wenn Zähler und Nenner durch einerlei Zahl dividirt werden sollen; z. B. $\frac{4:2}{7:2}$ heißt so viel, als man solle von 4 und von 7 die Hälfte nehmen. Dieses will aber wieder nichts anders sagen als jede Einheit dieser Zahlen in die Hälfte theilen. Solches geschieht, wenn man das Halbe einer Einheit mit den betreffenden Zahlen multiplicirt; also in unserem Beispiele ist $\frac{4:2}{7:2} = \frac{4\times\frac{1}{2}}{7\times\frac{1}{2}}$, also wieder auf den vorigen Fall zurückgebracht, daß $\frac{1}{2}$ blos Gattungsname ist, und auf den Werth des Bruches durchaus keinen Einfluß hat; derselbe also ungeändert bleibt.

---

*) In solchen Fällen wird der gemeinschaftliche Factor, oder das gemeinschaftliche Maaß von Zähler und Nenner eigentlich blos **Gattungsname**.

§. 77.

Wird ein Bruch mit einer Zahl multiplicirt, die so groß ist als der Nenner, so ist das Product gleich dem Zähler des Bruchs als ganze Zahl betrachtet.

Es ist schon vorne gesagt worden, daß jeder Bruch ursprünglich durch die Theilung der Einheit entsteht. Hält man diesen Begriff fest, so ist es einleuchtend, daß jeder größere Bruch (nämlich dessen Zähler größer als 1 ist) durch Multiplication seines Zählers mit dem einfachen Theil der Theilung entstanden ist: und wenn man diese Entstehung durch getrennte Faktoren anzeigt und den Nenner des Bruchs als 3ten Faktor beisetzt, so wird die Richtigkeit der Behauptung sogleich in die Augen fallen; z. B. es sey der Bruch $\frac{5}{6}$ gegeben, so kann man annehmen, er seye entstanden durch $5 \times \frac{1}{6}$; fügt man diesem Product noch den Nenner als Factor bei, so hat man $5 \times \frac{1}{6} \times 6$. Nun giebt $\frac{1}{6} \times 6 = \frac{6}{6} = 1$; daher wird $5 \times \frac{1}{6} \times 6 = 5 \times \frac{6}{6} = 5 \times 1 = 5$.

§. 78.

Vorstehendem zufolge ist jede ganze Zahl einem Bruche gleich, der zum Zähler das Product dieser ganzen Zahl in den Nenner des Bruchs hat.

Angenommen die ganze Zahl seye 9 (es könnte aber jede beliebige andere Zahl seyn), so lassen sich unendlich viele Brüche denken, die ihr in der vorstehenden Beziehung Genüge leisten; z. E.

$$\frac{9}{1}, \quad \frac{18}{2}, \quad \frac{27}{3}, \quad \frac{36}{4} \ldots \frac{324}{36} \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Der Beweis ist der nämliche wie vorher, als:

$$\frac{9}{1} = \frac{1}{1} \times 9 = 9, \frac{18}{2} = \frac{2}{2} \times 9 = 1 \times 9 = 9 \text{ ꝛc.}$$

§. 79.

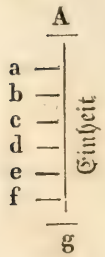
Vermehrende Rechnungsart mit Brüchen.

a) Durch Addiren.

Hat man mehrere Brüche von einerlei Benennung, und man will wissen, wie viel sie zusammen ausmachen, so darf man nur ihre Zähler addiren und der erhaltenen Summe den gemeinschaftlichen Nenner untersetzen.

Beweis: Es wird natürlich vorausgesetzt, daß die Einheit, wovon jeder der Brüche ein gewisser Theil ist, immer die nämliche oder die gleiche seye. Da nun die gleichen Nenner der Brüche anzeigen, daß ihre Zähler gleiche Theile der gleichen Einheit bezeichnen, oder daß die Zähler die Zahlen gleichartiger Dinge sind, so begreift sich einfach, daß die Summe der Zähler auch die Summe dieser gleichartigen Dinge ist. Um aber wieder anzudeuten, welcher Natur die Summe der Dinge ist, muß ihr der gemeinschaftliche Name, d. h. der allgemeine Nenner untergesetzt werden.

Stelle man sich unter der gemeinschaftlichen Einheit eine eine Linie Ag vor, die in 7 gleiche Theile getheilt seye, so ist



$Aa = ab = bc = cd = de = ef = fg = \frac{1}{7}Ag$

$Ab = Aa + ab = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}.$

$Ad = Ab + bc + cd = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}.$

$Af = Ad + de + ef = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$

$Ag = Af + fg = \frac{6}{7} + \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1$, der Einheit, wie aus der Figur ersichtlich.

Wären zu addiren: $\frac{5}{36}, \frac{8}{36}, \frac{9}{36}, \frac{13}{36}$, so verfahre man mit den Zählern wie bei der Addition mit ganzen Zahlen; also:

$5 + 8 + 9 + 13 = 35$ und setze der Summe den gemeinschaftlichen Nenner unter, so hat man

$$\frac{5}{36} + \frac{8}{36} + \frac{9}{36} + \frac{13}{36} = \frac{35}{36}.$$

§. 80.

Würde die Summe der Zähler größer werden als der Nenner, so ist dieß ein Anzeigen, daß der Werth des Bruchs die Einheit übersteigt; und will man wissen, um wie viel, oder überhaupt wie oft die ganze Einheit im Zähler enthalten ist, so darf man nur mit dem Nenner in die Summe der Zähler dividiren. Geht die Division auf, so besteht der Quotient aus ganzen Einheiten; wo nicht, so bildet der Rest, dividirt durch den Nenner, mit der ganzen Zahl den Quotienten; z. E. es sollen addirt werden:

1) $\frac{6}{17}, \frac{8}{17}, \frac{13}{17}, \frac{12}{17}, \frac{5}{17}, \frac{7}{17}$ so ist

$$\frac{6 + 8 + 13 + 12 + 5 + 7}{17} = \frac{51}{17} = 3 \text{ ganze, u.}$$

2) $\frac{8}{15}, \frac{5}{15}, \frac{7}{15}, \frac{13}{15}, \frac{14}{15}, \frac{11}{15}, \frac{9}{15} =$

$$\frac{8 + 5 + 7 + 13 + 14 + 11 + 9}{15} = \frac{67}{15} = 4\frac{7}{15} \text{ Ein-}$$

heiten.

Die Zahlen wie $4\frac{7}{15}$ nennt man gemischte Zahlen, oder auch öfters uneigentliche Brüche, weil sie leicht auf solche gebracht werden können.

§. 81.

Es ist jetzt der geeignetste Platz, zu zeigen, wie man gemischte Zahlen auf uneigentliche Brüche bringt. — Man be-

trachte das letzte Beispiel, in welchem die Bruchform $\frac{67}{15}$ auf $4\frac{7}{15}$ gebracht wurde. Solches ist dadurch bewerkstelligt worden, daß man, wie bei einer gewöhnlichen Division, mit dem Nenner als Divisor in den Zähler als Dividenden theilte, und dem erhaltenen Quotienten den Rest mit dem untersetzten Divisor oder Nenner anhängte. Verfahre man nun umgekehrt oder auf gleiche Art, wie bei der Division, wo man zu dem Produkte des Divisors mit dem Quotienten den Rest addirt und dadurch den Dividendus erhalten hat. Nur muß in unserem vorliegenden Falle darauf Rücksicht genommen werden, daß der Werth des Quotienten nicht verloren geht, dessen Ziffer keine ganze Zahlen, sondern nur die Summe von Einheitstheilen bedeuten; deßhalb wird nach vollbrachter Multiplication und Addition der Divisor oder Nenner des Rests unter die erhaltene Zahl gesetzt. — Kurz läßt sich die Regel: eine Zahl, die mit einem Bruch verbunden ist (gemischte Zahl), auf einen uneigentlichen Bruch, die Bruchform zu bringen, so fassen:

„Man multiplicire mit dem Nenner des Bruchs die „ganze Zahl, addire zu dem Produkt den Zähler des Bruchs „und setze dessen Nenner unter die erhaltene Summe;"

z. B. $5\frac{3}{8}$ soll auf die Bruchform gebracht werden, so ist

$$\frac{5 \times 8 + 3}{8} = \frac{43}{8}.$$

§. 82.

Sollen aber mehrere Brüche addirt werden, die keine gleichen Nenner haben, so kann dieß unmöglich durch Summirung ihrer Zähler geschehen, ohne vorher die Nenner in Uebereinstimmung mit einander zu bringen; denn man würde ja sonst ungleichartige Dinge zusammenzählen, was nie seyn darf. Um nun die Gleichmachung der Nenner zu bewerkstelligen, darf man sich nur erinnern, daß der Werth eines Bruches nicht

geändert wird, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt. Deßhalb untersucht man zuvörderst bei einer Reihe Brüche die Nenner, ob vielleicht zu dem größten von diesen, die übrigen Faktoren sind; ist dieß der Fall, so multiplicire man Zähler und Nenner dieser Brüche je mit dem betreffenden andern Faktor *) zum größern Nenner, worauf alle Brüche unter gleiche Benennung gebracht seyn müssen, ohne etwas von ihrem Werthe verloren zu haben, und man kann nun ihre Zähler addiren; z. B.

$\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{3}{5}$ sollen addirt werden.

Es ist 15 der größte Nenner; in solchem ist 3 enthalten und zwar 5 mal; mit diesem Faktor Zähler und Nenner von $\frac{2}{3}$ multiplicirt, giebt $\frac{2}{5} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{15}$.

Der Nenner 5 von $\frac{3}{5}$ ist auch 3 mal in 15 enthalten; daher ebenso multiplicirt, wird:

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{15}.$$

Nun sind alle Brüche gleichnamig, daher man ihre Zähler summiren kann:

$$\frac{10}{15} + \frac{4}{15} + \frac{9}{15} = \frac{10 + 4 + 9}{15} = \frac{23}{15} = 1\frac{8}{15}.$$

§. 83.

Es giebt Fälle, wo ein Nenner von einem andern ein Faktor ist, und der Bruch, welchem dieser größere Nenner angehört, ein solches gemeinschaftliches Maaß zwischen Zähler und Nenner hat, daß mit solchem und dem benannten Faktor sein Nenner erzeugt wird; in einem solchen Falle läßt sich

*) Das heißt: mit dem Quotienten des kleinern Nenners in den größern.

durch Division der Zähler und Nenner, mit gleicher Zahl, die gleiche Benennung herstellen; z. B.

$$\frac{6}{8} + \frac{3}{4} + \frac{9}{12} + \frac{4}{16}.$$

Hiebei hat man zunächst mit dem kleinsten Nenner zu untersuchen, ob er nicht ein Faktor der übrigen seye, was in vorstehendem Beispiele Statt findet; hierauf bemerkt man, daß die andern Faktoren, je die gemeinschaftlichen Maaße zwischen Zähler und Nenner sind; weßhalb sich gleiche Nenner daraus ableiten lassen, ohne daß der Werth eines Bruches Noth leiden würde. Nach diesem ist:

$$\frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}; \quad \frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}; \quad \frac{4 : 4}{16 : 4} = \frac{1}{4} \text{ und}$$

$$\frac{6}{8} + \frac{3}{4} + \frac{9}{12} + \frac{4}{16} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2}$$

§. 84.

Oefters findet man aber auch Gelegenheit, in einer Reihe von Brüchen die gleiche Benennung theils durch Multiplication, theils durch Division, mit Faktoren und Quotienten zu erhalten; z. B. in:

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{7} + \frac{9}{14} + \frac{15}{28} + \frac{16}{56} + \frac{3}{84} + \frac{20}{112}.$$

In diesem Beispiele wird man ersehen, daß ein Theil der Nenner in 28 enthalten ist; der andere Theil aber aus Produkten von 28 besteht; daher man die erstern mit den entsprechenden Faktoren multipliciren, und die letztern, wenn es zu gleicher Zeit die Zähler erlauben, mit den Quotienten dividiren muß. Es ist sonach:

$$\frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}, \qquad \frac{15}{28} \qquad \frac{16 : 2}{56 : 2} = \frac{8}{28}$$

$$\frac{4 \times 4}{7 \times 4} = \frac{16}{28} \qquad \frac{3 : 3}{84 : 3} = \frac{1}{28}$$

$$\frac{9 \times 2}{14 \times 2} = \frac{18}{28} \qquad \frac{20 : 4}{112 : 4} = \frac{5}{28}$$

daher $\frac{3}{4}+\frac{4}{7}+\frac{9}{14}+\frac{15}{28}+\frac{16}{56}+\frac{3}{84}+\frac{20}{112}=$

$=\frac{21}{28}+\frac{16}{28}+\frac{18}{28}+\frac{15}{28}+\frac{8}{28}+\frac{1}{28}+\frac{5}{28}=$

$=\frac{21+16+18+15+8+1+5}{28}=\frac{84}{28}=3$ Ganze.

§. 85.

Ist aber kein Nenner ein gemeinschaftliches Maaß zu einem andern, sondern sind sie alle Primzahlen unter sich, so kann der kleinste allgemeine Nenner nur die kleinste Zahl seyn, welche durch alle Nenner meßbar ist. In dem angenommenen Falle ist diese kleinste ausmeßbare Zahl aber keine andere, als das Produkt aus allen Nennern. Damit jedoch die Werthe der Brüche nicht verändert werden, so muß der Zähler jeden Bruches mit eben der Zahl multiplicirt werden, mit welcher sein Nenner vermehrt worden ist. Solche Zahl erfährt man dadurch, daß man mit jedem ursprünglichen Nenner in den neuen Nenner dividirt; oder sie ist der Quotient jedes einzelnen Nenners in den allgemeinen. Nun ist aber jeder Quotient das Produkt aus den übrigen Nennern, was ja schon daraus hervor geht, wie man den neuen Nenner gefunden hat; daher heißt die Regel, wenn Brüche unter gleiche Benennung gebracht werden sollen, deren Nenner Primzahlen unter sich sind:

„Man multiplicire Zähler und Nenner jeden Bruches „mit den Nennern aller übrigen;"

z. B. die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{11}$ sollen auf gleiche Benennung gebracht werden; da nun weder die Nenner Faktoren zu einander sind, noch Zähler und Nenner ein gemeinschaftliches Maaß haben, so multiplicire man nach und nach mit Gleichem, wie vorgeschrieben; also:

$\frac{3\times6\times7\times11}{4\times6\times7\times11}=\frac{1386}{1848}=\frac{3}{4}$ | $\frac{4\times4\times6\times11}{7\times4\times6\times11}=\frac{1056}{1848}=\frac{4}{7}$

$\frac{5\times4\times7\times11}{6\times4\times7\times11}=\frac{1540}{1848}=\frac{5}{6}$ | $\frac{7\times4\times6\times7}{11\times4\times6\times7}=\frac{1176}{1848}=\frac{7}{11}$

Jetzt haben alle Brüche gleiche Benennung, ohne ihren eigenthümlichen Werth verloren zu haben, und man kann solche addiren. Es ist:

$$\frac{1386 + 1540 + 1056 + 1176}{1848} = \frac{5158}{1848} = 2\,\frac{1462}{1848}$$

§. 86.

Man kann die Behandlung dieser verschiedenen Fälle auf ein mechanisches Verfahren zurückbringen. Es werden nämlich die Brüche in Spalten gesetzt, ein Nenner nach dem andern ausgestrichen und solche sowohl in eine Vertikalreihe vor die erste Spalte, als wie in die Spalten der übrigen Brüche gebracht. Auf diese Art giebt das Produkt der vordern Reihe, welche aus allen Nennern besteht, den neuen Nenner, und das Produkt der Zahlen in einer Spalte, den Zähler mitgerechnet, den neuen Zähler für diesen Bruch. Wäre vorher bemerklich, daß sich in jeder Spalte mit Inbegriff der Nennerreihe eine oder mehrere Zahlen vorfinden, die ein gemeinschaftliches Maaß haben, so verkleinere man mit solchem jene Zahlen. Diese Verkleinerung kann so oft Statt haben, als sie zu gleicher Zeit in jeder Spalte möglich ist; z. B.

$\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{14}{19}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{7}{10}$ sollen auf gleiche Benennung gebracht werden, so setze man:

| $\frac{5}{6}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{14}{19}$ | $\frac{13}{24}$ | $\frac{15}{16}$ | $\frac{7}{10}$ |

Hierauf den ersten Nenner 6 ausgestrichen, und vor die erste Spalte, so wie in alle übrigen versetzt. Mit den andern Nennern verfahre man auf gleiche Weise, also:

Nennerreihe	5	7	14	13	15	7
6	~~6~~	~~8~~	~~19~~	~~24~~	~~16~~	~~10~~
8	8	6	6	6	6	6
19	19	19	8	8	8	8
24	24	24	24	19	19	19
16	16	16	16	16	24	24
10	10	10	10	10	10	16

Da man nun in jeder dieser 7 Zeilen eine Zahl findet,

welche man durch 6 dividiren kann, so setze man die erhaltenen Quotienten in die nämliche Spalte, indem man die getheilte Zahl ausstreicht. Nach diesem dividire man durch 8, durch 4, durch 2 und zuletzt noch einmal durch 2, wobei jedesmal der Dividend ausgestrichen und der erhaltene Quotient in seine Spalte gesetzt wird. Findet sich nun kein gemeinschaftliches Maaß mehr vor, so multiplicire man die undurchstrichenen Zahlen einer Spalte mit einander und es giebt: das vorderste Produkt den neuen Nenner und die übrigen Produkte die neuen Zähler für die ursprünglichen Brüche. Demnach:

	a	b	c	d	e	f	g	
		5	7	14	13	15	7	
Brüche . .	∅	∅	8	x∅	24	x∅	x∅	6
	8	8	∅	∅	∅	∅	∅	8
	19	19	19	8	8	8	8	
	24	24	24	24	19	19	19	4
	x∅	x∅	x∅	x∅	x∅	34	24	2
	x∅	x∅	x∅	x∅	x∅	x∅	2∅	2
	1	4	1	1	1	1	1	
	1	1	3	1	1	1	1	
	6	4	4	6	4	∅	∅	
	8	5	5	5	5	5	8	
	5	2	2	8	2	3	3	
Produkte	4560	3800	3990	3360	2470	4275	3192	

es hat sich demnach verwandelt:

5/6	in	3800/4560	Der Nenner ist durch das Produkt der freien Zahlen in der Spalte a entstanden, d. h.
7/8	=	3990/4560	$19 \times 6 \times 8 \times 5 = 4560.$
14/19	=	3360/4560	Der Zähler in Spalte b entstand:
13/24	=	2470/4560	$5 \times 19 \times 4 \times 5 \times 2 = 3800.$
15/16	=	4275/4560	Spalte d.
7/10	=	3192/4560	$14 \times 6 \times 5 \times 8 = 3360,$ u. s. w., u. s. w.

§. 87.

Wollte man aber vorziehen, zu den Zahlen der Nenner auf die früher angegebene Art die kleinste Zahl zu suchen, welche durch alle Nenner meßbar ist und solche für den neuen Nenner annehmen; hierauf mit dem Quotienten der aus der Division eines jeden Nenners in den neuen hervorgeht, den Zähler des bezüglichen Bruches multipliciren, und solchermaaßen die gleiche Benennung herleiten; wobei zwar das Gleiche herauskommt, so wäre das vorige Beispiel auf folgende Weise zu behandeln: die Nenner nach ihrer Größe geordnet und allmählig die kleinste ihnen meßbare Zahl gesucht:

6
8
10
16
19
24

1) 6|8|1 — 6

2|6|3

= 6|3

=

$\frac{6}{2} \times 8 = 3 \times 8 = 24$

2) 10|24|2 — 20

4|10|2 — 8

2|4|2 — 4

=

$\frac{10}{2} \times 24 = 5 \times 24 = 120$

3) 16|120|7 — 112

8|16|2 — 16

=

$\frac{16}{8} \times 120 = 2 \times 120 = 240$

4) 19|240|12 19 × 240 = 4560
19
50
38
12|19|1
12
7|12|1
7
5|7|1
5
2|5|2
4
1

19 u. 240 sind Primzahlen unter sich; daher

5) 24 4560|190 hier ist also 4560 die kleinste meßbare Zahl von 24 und 4560; also auch von allen übrigen Nennern.
24
216
216
=

Man hat nun für den allgemeinen Nenner 4560 gefunden: jetzt dividire man mit jedem anfänglichen Nenner in diesen neuen, und multiplicire mit dem erhaltenen Quotienten immer den entsprechenden Zähler, so erhält man für den

Zähler:

1ten Bruch: 4560 : 6 = 760, also 760 × 5 = 3800.
2 = = 4560 : 8 = 570, = 570 × 7 = 3990.
3 = = 4560 : 19 = 240, = 240 × 14 = 3360.
4 = = 4560 : 24 = 190, = 190 × 13 = 2470.
5 = = 4560 : 16 = 285, = 285 × 15 = 4275.
6 = = 4560 : 10 = 456, = 456 × 7 = 3192;

also wieder der nämliche Nenner und die gleichen Zähler wie vorhin.

Daß die vorige Methode einfacher ist, wird man leicht einsehen.

§. 88.

Bleibt bei der Division einer kleinern Zahl in eine größere ein Rest, so muß die Zahl des Restes mit dem untersetz-

ten Divisor, in Gestalt eines Bruches der ganzen Zahl des Quotienten beigesetzt werden, weil der dadurch ausgedruckte Werth des Bruches zur Vollständigkeit der Summe des Quotienten gehört. Uebrigens hat man dieses schon bei den uneigentlichen Brüchen gezeigt. Nur soll hier angegeben werden, wie es in dem Falle gehalten wird, wenn ein solcher, oder überhaupt ein anderer Bruch in den kleinsten Zahlen ausgedruckt werden kann, ohne von seinem Werthe zu verlieren.

Zunächst untersuche man, ob Zähler und Nenner ein gemeinschaftliches Maaß haben; was man aber meistens schon an ihren Endungen oder der Summe ihrer Ziffern sehen kann. Ist ein solches vorhanden, so dividire man Zähler und Nenner damit; z. B. $\frac{308}{396}$ soll verkleinert werden. Die Summe der ungeraden Ziffern des Zählers beträgt 11, daher ist solcher durch 11 theilbar; im Nenner aber ist die Ziffersumme der geraden Stellen gleich der der ungeraden, also ist auch dieser mit 11 theilbar; daher: $\frac{308 : 11}{396 : 11} = \frac{28}{36}$. In diesem verkleinerten Bruche ist das gemeinschaftliche Maaß = 4, deßhalb $\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$ der kleinstmögliche Ausdruck, weil 7 und 9 Primzahlen, unter sich sind.

Wäre aber kein gemeinschaftliches Maaß aufzufinden, was immer der Fall seyn muß, wenn Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind, und man möchte doch einen Näherungswerth in kleinern Zahlen von dem Bruche haben, so verfahre man auf folgende Weise, die hier nur historisch angeführt, aber wegen der erforderlichen höhern Kenntnisse nicht erklärt werden kann:

„Man dividire den Nenner durch den Zähler und bemerke die Ganzen des Quotienten, mit dem Rest dividire man „in den vorigen Divisor, setze die Ganzen des Quotienten aus „und so fahre man beliebig fort, immer mit dem Rest in den „vorangegangenen Divisor dividirend;“ z. B. es soll der Bruch $\frac{631}{5879}$ reduzirt werden, so ist:

	9	3	6	2	4	1	2
	5879 :	631 :	200 :	31 :	14 :	3 :	2 : 1*)
	5679	600	186	28	12	2	2
1ter Rest =	200	31	14	3	2	1	0

Die obere Reihe Zahlen sind die ganzen Quotienten, welche man nun in ihrer Ordnung neben einander setze; sondere jeden durch einen Vertikalstrich ab und stelle zur Linken den fingirten Bruch $\frac{0}{1}$ voraus. Unter dem ersten Quotienten formire man einen Bruch, der ihn selbst zum Nenner und 1 zum Zähler hat. Hierauf multiplicire man Zähler und Nenner dieses letzt gebildeten Bruchs mit dem zweiten Quotienten, addire zum Produkt des Zählers den Zähler des vorhergehenden Bruchs, also erstmals 0 und zum Produkt des Nenners den vorangegangenen Nenner, also erstmals 1.

Aus den erhaltenen Zahlen mache man unter dem zweiten Quotienten den dritten Bruch, dessen Theile gleichnamig mit seinen Elementen sind, und so fahre man mit Darstellung der Brüche fort; wie hier zu sehen:

	9	3	6	2	4	1	2
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{19}{177}$	$\frac{41}{382}$	$\frac{183}{1705}$	$\frac{224}{2087}$	$\frac{631}{5879}$

Je weiter sich die Brüche gegen die Rechte entfernen, desto nähee kommt ihr Werth dem ursprünglichen Bruche. Die vordern weichen am meisten, jedoch auch nicht zu viel ab. Die Benützung des einen oder des andern dieser Brüche anstatt $\frac{631}{5879}$ hängt lediglich von dem Grade der Genauigkeit ab, welchen der damit zu erreichende Zweck haben soll.

*) Der letzte Rest, oder das gemeinschaftliche Maaß der beiden Zahlen ist 1, daher sie Primzahlen unter sich sind.

Um später nicht mehr durch Verwandlungen und Reduktionen der Brüche aufgehalten zu seyn, wurden vorstehende Lehren jetzt schon vorgetragen.

§. 89.

b) Durch Multiplication.

Wird gesagt, ein Bruch soll so und so viel mal genommen werden, so verhält es sich ebenso, wie bei der Multiplication der ganzen Zahlen; nämlich es bedeutet: die Anzahl Theile der Einheit sollen so oft zu sich selbst addirt werden, als der Multiplicator Einheiten enthält. Wenn also

$\frac{1}{8}$ fünfmal genommen werden soll, so wäre

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Wenn, wie im Beispiel der Multiplicator eine ganze Zahl ist, so heißt die Regel:

„Man multiplicire den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl und setze unter das erhaltene Produkt den Nenner des Bruchs.“

Wäre der Zähler des Bruchs größer als 1, so kann man sich denselben als ein Produkt denken, wovon seine Zahl selbst und die Einheit Faktoren sind; z. B. $\frac{4}{7}$ ist entstanden durch $4 \times \frac{1}{7}$. — Soll nun ein solcher Bruch wieder mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, z. E. $\frac{4}{7}$ mit 7, so kann man setzen: $7 \times 4 \times \frac{1}{7}$; aus den Faktoren 7 und 4 das Produkt gemacht, giebt 28 und man hat nun $28 \times \frac{1}{7} = \frac{28}{7} = 4$ (siehe §. 77).

Würde es heißen, eine ganze Zahl soll durch einen Bruch multiplicirt werden, so ist es das Nämliche wie vorher; da man von zwei Faktoren zum Multiplicand oder Multiplicator annehmen kann, welchen man will. Man nehme an, es solle 1 mit dem Bruche $\frac{4}{7}$ multiplicirt werden, so würde die Forderung wieder so lauten: 1 soll so oft zu sich selbst addirt werden als $\frac{4}{7}$ Einheiten enthält; dieser Bruch ist aber nur der 7te Theil der Einheit, also kann auch 1 nur Ein Siebentheil genommen werden, was ausgedrückt wird: $1 \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$.

Oder man kann auch folgern:

Multiplicirt man mit dem Zähler des Bruchs die ganze Zahl, so ist das Produkt 7 mal zu groß, weil man nur mit dem 7ten Theil des Zählers hätte multipliciren sollen; daher muß dasselbe wieder mit 7 oder dem Nenner des Bruchs dividirt werden. Also

$$1 \times \tfrac{1}{7} = \tfrac{1}{7}.$$

§. 90.

Sollen zwei Brüche miteinander multiplicirt werden, so gilt wieder die allgemeine Regel der Multiplication; z. E.

$\frac{1}{2}$ multiplicirt mit $\frac{1}{3}$ heißt: man soll $\frac{1}{2}$ so oft zu sich selbst addiren als $\frac{1}{3}$ Einheiten hat. Aber $\frac{1}{3}$ besteht nur aus dem dritten Theil einer Einheit, deßhalb kann auch $\frac{1}{2}$ nur zum dritten Theil genommen werden, oder sein Werth verkleinert sich um das Dreifache. Da nun ein Bruch um so viel mal kleiner wird, als man seinen Nenner multiplicirt, so ist der 2×3te, oder 6te Theil der Einheit, das verlangte Produkt; was bei ganzen Zahlen Quotient heißen würde.

§. 91.

Wie die Multiplication mit ganzen Zahlen, eine Vermehrung der Einheit ins unendlich Große ist, so ist die Multiplication der Brüche, eine Vermehrung in's unendlich Kleine *). Nachstehende Figuren sollen dieß deutlicher erklären:

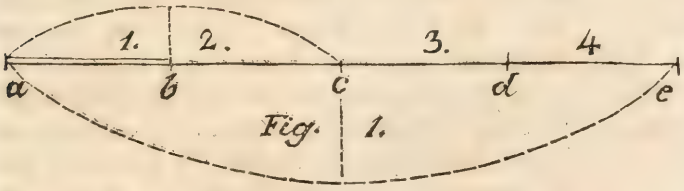


Fig. 1.

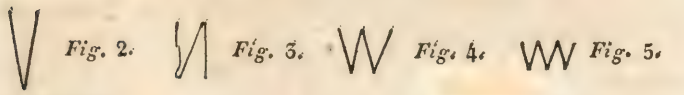


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.

*) Man könnte die erstere positive und die andere negative Multiplication nennen, weil sie einander entgegengesetzt sind.

In der Figur 1 stelle die Linie ab die Einheit vor; wird diese um eine ganze Zahl, z. E. 4 mal genommen, so wird dadurch die Länge ae erzeugt. Nimmt man ac = 2 ab doppelt oder 2 mal, so erhält man ebenfalls die Länge ae = 2 ac = 4 ab = 4 Einheiten. Solches sind Vermehrungen ganzer Zahlen und die Einheiten liegen nebeneinander in dem Produkte. Soll aber die Einheit in sich selbst 2fach genommen werden, so kann dieß nicht anders geschehen, als daß man sie in der Mitte zusammenbricht, wie in Fig. 2 *). Die erhaltenen Theile, liegen nun in der Einheit oder aufeinander. Sieht man einen Theil dieser verkürzten Linie wieder als eine Einheit, nämlich als eine Bruch einheit der Theilungszahl an, so ist solche eine 2 mal kleinere als die Grundeinheit und heißt deßhalb die Hälfte von dieser, was geschrieben wird, mit: $\frac{1}{2}$. Man spricht die vollbrachte Veränderung der Grundeinheit auch aus: die Einheit ist $\frac{1}{2}$ mal genommen.

Fig. 3. Bricht man die Grundeinheit in drei einander gleiche Theile, so ist der Werth eines Theils Ein Drittel = $\frac{1}{3}$ derselben, oder die Grundeinheit ist $\frac{1}{3}$ mal genommen worden.

Fig. 4. Läßt man die doppelt zusammengelegte Einheit noch einmal in der Mitte der Theile zusammenbrechen, so stellt sich, das einzelne Stück, wie eine Einheit betrachtet, als die Hälfte der Hälfte und als ein Viertel der Grundeinheit dar. Die Richtigkeit wird man daraus ersehen, weil nun die Einheit vier solcher Theile enthält.

Fig. 5. Wird die dreifach zusammengelegte Grundeinheit wieder in der Mitte gebrochen, so werden die neuen Theile Sechstel seyn und in Beziehung auf die Bruch einheit ist die Grundeinheit $\frac{1}{6}$ mal genommen worden.

---

*) Diese Brechungen kann man am Deutlichsten an einem Streifchen Papier zeigen.

Auf diese Art kann man die Brechungen fortsetzen, so weit man will, und immer werden die Theile zahlreicher, aber auch kleiner.

Man wird gesehen haben, daß nach jeder Brechung die Anzahl der Theile in der Einheit so groß geworden ist, als das Produkt der vorangegangenen Brechungszahl mit der neuen macht.

Die Multiplication der Einheit und ihrer Theile mit einem Bruche, ist nun nichts anders, als die vielfachen Brechungen vorzunehmen, deren Anzahl der Nenner des Multiplicators bedeutet; z. E. es soll 1 mit $\frac{1}{9}$ multiplicirt oder 1 Ein Neuntel mal genommen werden; so wird solches angezeigt durch: $1 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ dem Produkt oder der Einheit der Brechung.

$\frac{1}{9} \times \frac{1}{2}$ heißt: die Brechungs-Einheit $\frac{1}{9}$ noch $\frac{1}{2}$ mal zu nehmen, d. h., sie in der Mitte zusammenlegen, wodurch natürlich in der Grundeinheit 18 solcher Theile entstehen werden. Ein einzelner Theil ist daher seinem Werthe nach $\frac{1}{18}$ der Grundeinheit und diesen Bruch hätte man erhalten, wenn man in $\frac{1}{9} \times \frac{1}{2}$ die Nenner mit einander multiplicirt und das Produkt unter die Einheit gesetzt hätte.

§. 92.

Die Multiplication zweier Brüche wird auch so erklärt, wenn wir hiezu das so eben berührte Beispiel benützen wollen:

„Multiplicirt man den Multiplicand $\frac{1}{9}$ mit dem Zähler 1 „des Multiplicators $\frac{1}{2}$, so hat man mit einer ganzen Einheit „und deßhalb zweimal zu viel multiplicirt, weil dieser Zähler „durch 2 dividirt ist; weßwegen das Produkt wieder um so „viel mal vermindert werden muß; was dadurch geschieht, „daß man den Nenner desselben mit 2 multiplicirt.“

§. 93.

Aus dem Bisherigen folgt die Regel für die Multiplication zweier Brüche *):

„Man multiplicire die Nenner der Brüche in einander „und setze das Produkt als neuen Nenner unter die Einheit;"

z. B. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{9} =$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{90} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{630} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{5670}$

§. 94.

Bestehen die Zähler aus mehreren Einheiten, so kann man solche Zähler in Faktoren mit der Einheit zerlegen und sie als ganze Zahlen ansehen, die unter sich multiplicirt werden. Mit den Brüchen verfährt man wie vorhin. Zuletzt hätte man den Fall, daß ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, in welchem man wie in §. 89 verfährt; z. B.

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{5}{8} \times \frac{7}{9} \times \frac{8}{11} =$$

$$= 3 \times \frac{1}{5} \times 4 \times \frac{1}{7} \times 5 \times \frac{1}{8} \times 7 \times \frac{1}{9} \times 8 \times \frac{1}{11} =$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{11} \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 8 =$$

$$= \frac{1}{27720} \times 3360 = \frac{3360}{22720} = \frac{56}{462} = \frac{28}{231} = \frac{4}{33}$$

Oder: da der Zähler des Bruchprodukts auf diese Art immer 1 bleiben muß, und das Produkt der ganzen Zahlen gleich dem Produkt der Zähler der Brüche ist, indem letztere den Faktor 1 ebenfalls enthalten, so kann man auf eine kürzere Weise zum Ziele gelangen, wenn man verfährt.

„Man multiplicire die Zähler der Brüche

*) Wenn auch mehrere Brüche mit einander zu multipliciren sind, so kommen doch immer nur 2 zusammen auf einmal in Betracht.

„miteinander und mache ihr Produkt zum neuen „Zähler; ebenso mache man das Produkt sämt„licher Nenner zum neuen Nenner.“

§ 95.

1) Ist eine gemischte Zahl mit einem Bruche zu multipliciren, so bleibt es das Einfachste: erstere auf einen uneigentlichen Bruch zu bringen und hierauf die Multiplication, wie sie für zwei Brüche vorgeschrieben ist, vorzunehmen; z. B.

$$6\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{53}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{159}{56} = 2\frac{47}{56}$$

2) Sind zwei gemischte Zahlen miteinander zu multipliciren, so bringe man beide vorerst auf die Bruchform und verfahre im Uebrigen wie mit zwei eigentlichen Brüchen; z. B.

$$9\frac{3}{5} \times 11\frac{4}{9} = \frac{48}{5} \times \frac{103}{9} = \frac{4944}{45} = \frac{1648}{15} =$$

$$= 109\frac{13}{15}.$$

§. 96.

Beispiele über die Multiplication der Brüche:

1) $\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{9} \times \frac{7}{11} \times \frac{8}{15} = \frac{20160}{415800} = \frac{112}{2310}$.

2) $8\frac{3}{4} \times \frac{3}{16} \times 5\frac{7}{8} \times 5\frac{8}{9} \times \frac{7}{13} = \frac{1207605}{59904} =$

$$= 20\frac{9525}{59904}.$$

---

§. 97.

Vermindernde Rechnungsart mit Brüchen.

a) Durch Subtrahiren.

Nach den Erklärungen, die bei der Addition der Brüche gegeben worden sind, wird es nun leicht seyn, die Subtraction

zu behandeln; denn diese ist ja nichts anders, als von der Summe gleichartiger Dinge, eine kleinere Summe der nämlichen Gattung abzuziehen, um in dem Rest zu ersehen, wie viel Dinge die erstere Summe mehr enthält als die andere und umgekehrt.

1) Sind daher zwei Brüche unter gleicher Benennung, so darf man nur den Zähler des kleinern, von dem Zähler des größern abziehen und unter den erhaltenen Rest den gemeinschaftlichen Nenner setzen, so hat man die verlangte Differenz beider Brüche;

z. B. $\frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$ Differenz.

2) Haben die zwei Brüche ungleiche Nenner, so bringe man sie unter einerlei Benennung und ziehe auf die so eben bemerkte Art vom größern Bruch den kleinern ab. Durch die Herstellung der Gleichnamigkeit erfährt man meistens erst, welches der größere oder kleinere Bruch ist; z. B.

die Differenz zwischen $\frac{17}{18}$ und $\frac{21}{23}$ zu finden.

$\frac{17}{18} = \frac{391}{414}$ und $\frac{21}{23} = \frac{378}{414}$ daher

$\frac{391}{414} - \frac{378}{414} = \frac{391-378}{414} = \frac{13}{414}$ gleich der

Differenz von $\frac{17}{18} - \frac{21}{23}$.

3) Sind zwei Abtheilungen von Brüchen gegeben, und man will ihre Differenz wissen, so bringe man die Brüche beider Theile auf eine und dieselbe Benennung, wenn sie es noch nicht sind; summire die Zähler jeden Theils besonders, ziehe die kleinere Summe von der größern ab, und setze unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner, so ist dieser Bruch der Werth der gesuchten Differenz; z. B.: Es sey

Iter Theil $\frac{5}{5} + \frac{6}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{8}$; II. Thl. $\frac{8}{15} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}$;

so ist nach §. 86.

I. Abtheilung.					II. Abtheilung.				
Nenner:	3	6	4	5	8	2	3	1	Divisoren.
8	8	7	9	8	13	3	4	8	
7	7	8	8	8	8	8	8	8	
9	9	9	7	7	7	7	7	7	5
8	8	8	8	9	9	9	9	9	4
13	13	13	13	13	8	8	8	8	3
3	3	3	3	3	3	13	13	13	
4	4	4	4	4	4	4	3	3	
5	8	5	5	5	5	5	5	4	
2	2	2		3	2	2	2	2	
3	3	3			3	3		3	
32760	19656	28080	14560	20475	20160	21840	24570	6552	

$$\text{1ter Theil} = \frac{19656 + 28080 + 14560 + 20475}{32760} = \frac{82771}{32760}$$

$$\text{2ter Theil} = \frac{20160 + 21840 + 24570 + 6552}{32760} = \frac{73122}{32760}$$

$$\text{also:} \quad \frac{82771 - 73122}{32760} = \frac{9649}{32760} \text{ der Differenz.}$$

§. 98.

b) Durch Division.

Bei den ganzen Zahlen war die Regel für das Dividiren: man untersuche, wie oft eine Zahl von einer andern abgezogen werden kann, oder wie oft eine in der andern enthalten ist; die Zahl, welche solches anzeigt, ist der Quotient. Das Nämliche wird bei der Division mit Brüchen verlangt. — Um dieses einzusehen, ist es das Beß'te, sogleich mit Beispielen zu beginnen:

1) Soll eine ganze Zahl, z. E. 8, mit einem Bruch $\frac{1}{3}$ dividirt werden, so ist die Betrachtung:

In jeder Einheit der 8 ist $\frac{1}{3}$ dreimal enthalten, daher in allen zusammen:

$$3 \times 8 = 24 \text{ mal } (\tfrac{1}{3}.)$$

Man verstehe bei der Division mit Brüchen in der Quotientenzahl ja nicht ein Vielfaches der Grundeinheit, sondern ein Vielfaches der Bruchseinheit, welche den Divisor vorstellt. Im gegebenen Beispiele ist der Werth des Quotienten, 24 nicht 24 Einheiten der Zahl 8, sondern 24 Divisoren oder Dritteln gleich. Der Quotient ist also beständig von der nämlichen Gattung, wie der Divisor.

2) Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl getheilt werden, z. B. $\frac{1}{3}$ durch 8, so ist dieß anzusehen: „Die Einheit des Zählers von $\frac{1}{3}$ durch 8 dividirt, giebt $\frac{1}{8}$; da aber jene Einheit selbst schon durch 3 getheilt war, so hat man in $\frac{1}{8}$ einen 3 mal zu großen Quotienten, daher man den Nenner noch mit 3 multipliciren muß, woraus sich ergiebt:

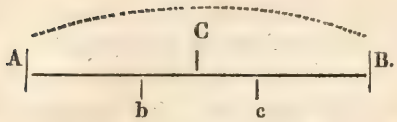
$$\frac{1}{3} : 8 = \frac{1}{8 \times 3} = \frac{1}{24} \text{ der Grundeinheit.}$$

3) Ist ein Bruch durch einen andern zu dividiren, z. B. $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{3}$, so verhält sich: $\frac{1}{3}$ ist in 1 dem Zähler des Bruchs $\frac{1}{2}$, als Einheit betrachtet, 3 mal enthalten (diesen Quotienten ausgesetzt); aber die Einheit war selbst durch 2 getheilt, also muß auch der Quotient 3 durch 2 getheilt werden; wornach man zum Quotienten $\frac{3}{2}$ erhält, was bedeutet, daß $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$ drei halbe Drittel enthalten seye. Die Richtigkeit der Division muß sich durch Multiplication des Quotienten mit dem Divisor bewähren, wenn solches Produkt dem Dividend gleich wird. Man sehe:

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$, Probe: $\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ dem Dividend, wie seyn sollte.

Man kann sich das gegebene Beispiel auch durch nebenstehende Figur versinnlichen:

1.



Es seye die Linie AB die Grundeinheit, und einmal in zwei gleiche Theile AC = CB, wovon also jeder einzelne = $\frac{1}{2}$ der Einheit ist; und das anderemal in drei gleiche Theile Ab = bc = cB = $\frac{1}{3}$ AB oder der Einheit, getheilt. Nun entfernen sich die 2 Drittelstheile Ab und Bc gleichweit von den Enden der Einheit; so daß also das übrige Drittel in der Mitte der Einheit liegen, daher auch dessen Mitte, die Mitte C der Einheit selbst seyn muß. Folglich ist Cb = Cc = ein halbes Drittel. Die Hälfte AC ist aber gleich Ab + Cb, d. h. = 1 + $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ (Dreihalbe) Drittel: dieß heißt aber nichts anders, als $\frac{1}{3}$ ist $\frac{3}{2}$ Drittel in $\frac{1}{2}$ enthalten, wie vorhin behauptet wurde.

§. 99.

Bei genauer Betrachtung der letzten Division wird man gewahr, daß der Zähler des Quotienten, gleich dem Nenner des Divisors geworden, und zu gleicher Zeit ein Produkt in den Zähler des Dividends ist; ebenso zeigt sich, daß der Quotient den Nenner des Dividends zum Nenner erhalten hat, der ein Produkt aus dem Zähler des Divisors in den Nenner des Dividends seyn kann. Das erschienene Resultat hätte man demnach auch dadurch erhalten können, wenn man Zähler und Nenner des Divisors verwechselt und mit diesem verkehrten Bruche den Dividend multiplicirt hätte, wie hier zu sehen

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$ dem Quotienten.

Ehe wir aber aus dieser Beschaffenheit eine Regel ziehen, wollen wir vorher noch die Division anderer Brüche betrachten, deren Zähler größer als 1 sind; z. B. $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$.

Zerlege man die Zähler wieder in Faktoren, wovon der eine 1 ist, so hat man:

$3 . \frac{1}{5} : 2 . \frac{1}{7}$; nun ist $\frac{1}{7}$ in dem einfachen Zähler des Divi-

dends 7 mal enthalten; derselbe ist aber durch 5 vorher schon verkleinert: dieses auf den Quotienten bezogen, giebt $\frac{7}{5}$. Weil aber wieder der Dividend mit 3 multiplicirt ist, so muß auch der Quotient um so viel mal vermehrt, also $3 \times \frac{7}{5} = \frac{21}{5}$ werden. Endlich hat man für $\frac{1}{7}$ den Quotienten gesucht, anstatt er für 2 mal $\frac{1}{7}$ hätte genommen werden sollen, man hat also mit einer 2 mal kleinern Zahl getheilt und sonach auch einen 2 mal größern Quotienten erhalten müssen; daher man jetzt diesen wieder mit 2 dividirt, d. h. seinen Nenner multiplicirt. Nach diesem wird also;

$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 2} = \frac{21}{10}$. Dieses hätte man auch erhalten, wenn man den in seinen Theilen verwechselten Divisor mit dem Dividend multiplicirt hätte*); denn es ist:

$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$ (zwei Siebentel);

oder $\frac{2}{7}$ sind in $\frac{3}{5}$ enthalten: $2\frac{1}{10}$ mal

Probe: $\frac{21}{10} \times \frac{2}{7} = \frac{42}{70} = \frac{3}{5}$ dem Dividend.

§. 100.

Aus dem Vorstehenden geht demnach für die Division der Brüche die Regel hervor:

„Man multiplicire den Zähler des Dividends mit dem „Nenner des Divisors, so giebt das Produkt den Zähler des „Quotienten; und den Nenner des Dividenden multipli„cire man mit dem Zähler des Divisors, so hat man „den Nenner des Quotienten.“

Oder mechanisch:

„Man verwechsle Zähler und Nenner des Divisors „und multiplicire hierauf die zwei Brüche; so ist das „Produkt der verlangte Quotient.“

*) Der Grund dieses Verfahrens liegt in der Gleichmachung der Nenner, wie wir später sehen werden.

§. 101.

Die angeführten Regeln gelten auch für die Fälle, wenn eine ganze Zahl durch einen Bruch, oder ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden soll; denn man kann jede ganze Zahl als einen Bruch ansehen, dessen Nenner 1 ist; wie z. E.

1) $3 : \frac{1}{4} = \frac{3}{1} : \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{1} = \frac{12}{1} = 12.$

2) $\frac{5}{6} : 9 = \frac{5}{6} : \frac{9}{1} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{54}$

Von zwei gleichen Brüchen ist natürlich einer im andern immer 1 mal enthalten.

Bei Brüchen von verschiedenen Zählern, aber gleicher Benennung, ist der Quotient des kleinern Bruchs in den größern, gleich dem Quotienten ihrer Zähler; z. E. zwischen:

$\frac{6}{10} : \frac{3}{10}$ ist der Quotient $= \frac{6}{3} = 2$; d. h. $\frac{3}{10}$ ist in $\frac{6}{10}$ zweimal enthalten, was auch nach der gegebenen Regel hätte werden müssen;

denn $\frac{6}{10} : \frac{3}{10}$ ist gleich $\frac{6}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{60}{30} = 2.$

Bei gleicher Benennung gelten die Nenner blos als Gattungsname und haben auf den Quotienten keinen Einfluß. Sie geben diesem nur den Namen der Art.

§. 102.

Aus vorstehenden Gründen wäre das Verfahren bei Division von Brüchen mit verschiedenen Nennern auch ganz richtig gewesen, wenn man sie vorher auf gleiche Benennung gebracht und hierauf ihre Zähler in einander dividirt hätte, wie in dem Beispiel: $\frac{5}{7} : \frac{2}{5} = \frac{5 \times 5}{7 \times 5} : \frac{2 \times 7}{5 \times 7} = \frac{25}{35} : \frac{14}{35} =$

$= \frac{25}{14} = 1\frac{11}{14}$; mal $\frac{2}{5}$. Nach der Regel wäre:

$\frac{5}{7} : \frac{2}{5} = \frac{5}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{14} = 1\frac{11}{14}$; mal $\frac{2}{5}$, wie vor-

her. Es ist das vorige ein weiterer Beweis zum letzten Verfahren.

§. 103.

Beispiele über die Division mit Brüchen.

Wäre eine Reihe Brüche durch eine andere Reihe dergleichen zu dividiren, so vereinige man die einzelnen Brüche jeden Theils besonders unter einerlei Nenner je zu einem Bruche und dividire hierauf nach den gegebenen Vorschriften mit dem Divisor in den Dividend; z. B.

Dividend. | Divisor.

1) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8}$, | $\frac{6}{7} + \frac{1}{9} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10}$, s. i.

$\frac{8 + 20 + 21}{24} : \frac{540 + 70 + 252 + 189}{630} =$

$= \frac{49}{24} : \frac{1051}{630} = \frac{49}{24} \times \frac{630}{1051} = \frac{30870}{25224} = 1\frac{5646}{25224} =$ (3)

$= 1\frac{1882}{8408} = 1\frac{941}{4204}$ Quotient. (2)

Sind in einem oder beiden Theilen der Division negative Brüche, so muß nach Herstellung der Gleichnamigkeit in einem Theile, die Summe derselben von der Summe der übrigen positiven der betreffenden Reihenklasse abgezogen und mit dem Rest oder den Resten wie vorher verfahren werden.

Dividend. | Divisor.

2) $\frac{13}{15} + \frac{7}{9} + \frac{5}{11} - \frac{2}{3} - \frac{10}{13}$, | $\frac{20}{33} + \frac{3}{19} - \frac{3}{5} =$

$= \frac{5577 + 5005 + 2925 - 4290 - 4950}{6435} : \frac{1900 + 495 - 1881}{3135} =$

$= \frac{13507 - 9240}{6435} : \frac{2395 - 1881}{3135} = \frac{4267}{6435} : \frac{514}{3135} =$

$= \frac{4267}{6435} \times \frac{3135}{514} = \frac{13377045}{3307590} = 4\frac{146685}{3307590} =$

$= 4\frac{29337}{661518}$ Quotient.

Ist entweder der Dividend oder Divisor, oder auch beide zugleich mit Faktoren und ganzen Zahlen vermischt, so reduzire und entwickle man in jedem derselben Alles auf einen Bruch und man hat wieder den einfachen Fall*); z. B.

Dividend.	Divisor.
3) $6+\frac{4}{5}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{9}{11}$,	$8\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}+\frac{10}{14}-3=$
$=6+\frac{12}{40}+\frac{1}{2}-\frac{9}{11}$	$:\ 8+\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}+\frac{10}{14}-3=$
$=\frac{660+33+55-90}{110}$	$:\ \frac{224+15+20-84}{28}=$

$$=\frac{748-90}{110}:\frac{259-84}{28}=\frac{658}{110}:\frac{259}{28}=\frac{658}{110}\times\frac{28}{259}=$$

$$=\frac{18424}{28490}=\frac{9212}{14245}\text{ dem Quotienten.}$$

Zu diesem Beispiele stehe noch die Erklärung hier, daß bei Herstellung der gleichen Nenner, die Ganzen eines Gliedes der Division so lange unberührt bleiben, bis man den allgemeinen Nenner für die Brüche eben dieses Gliedes gefunden hat. Hierauf tritt der Fall ein, daß wenn eine ganze Zahl mit dem Nenner eines Bruches zu gleicher Zeit multiplicirt und dividirt wird, der entstehende Bruch der ganzen Zahl gleich ist.

Auf diese Art hat man in vorstehendem Exempel die ganze Zahl 6 des Dividends mit dem allgemeinen Nenner 110, welchen seine Brüche erhalten haben, multiplicirt und dividirt und sonach dieselbe gleichnamig mit solchen gemacht. Ebenso wurden die zwei ganzen Zahlen 8 und 3 des Divisors behandelt.

Der Ordnung nach sollte nun die Erklärung und Behandlung der Dezimalbrüche folgen, da aber zu ihrer Entwick-

*) Eine gemischte Zahl wie $9\frac{3}{4}$ ist soviel als $9+\frac{3}{4}$ und umgekehrt.

lung aus andern Brüchen noch einige Vorbereitungen nöthig sind, so wollen wir sie nach diesen vornehmen.

---

§. 104.

Die Gleichungen.

Es ist unerklärlich, wie die meisten Arithmetiker die Lehre von den einfachen Gleichungen nicht in die Elemente der Arithmetik, wenigstens zum Theil, aufnehmen wollen, da dieselbe ja doch leicht faßlich, besonders aber unentbehrlich für die Entwicklung der Verhältnisse und Proportionen ist. Wahrscheinlich haben sie hiebei die allgemeinen algebraischen Zeichen und die Gleichungen höherer Grade im Auge, deren Erklärung freilich hier nicht passend wäre, die sie aber eng verkettet unter dem Namen Gleichungen betrachten. — Dem seye nun wie ihm wolle, so werde hier der Versuch gemacht, die einfachsten Gleichungen schon dem Anfänger anschaulich und brauchbar zu machen, und wenn auch nur einiger Erfolg zu hoffen ist, der aber aus keinem Grunde bezweifelt werden kann, so wäre das Zutrauen in die Fassungsgabe wißbegieriger Jünglinge hinlänglich gerechtfertigt.

§. 105.

Man wird aus den bisherigen Lehren entnommen haben, daß ein und die nämliche Zahl auf verschiedene Arten entstehen kann; denn es ist möglich, daß sie:

1) die Summe zweier oder mehrerer Zahlen,
2) die Differenz zweier Zahlen oder Summen,
3) das Produkt zweier oder mehrerer Zahlen,
4) der Quotient einer Zahl in die andere, und endlich
5) die Entwicklung aus zusammengesetzten Werthen der vorstehenden Fälle ist.

Diese verschiedenen Entstehungsarten einer Zahl durch andere Zahlen zeigt man durch diese selbst und durch die Zeichen der Rechnungsarten an, wie wir sie schon kennen gelernt haben, so daß immer die Funktion jeder Zahl zum ganzen Erfolg dargestellt ist. Die Beschreibung bildet eine zusammenhängende Querlinie, z. E. die Zahl 60 kann entstanden seyn durch:

Summiren.

1) $40 + 20$; 2) $10 + 30 + 20$; 3) $(6 + 4) + (16 + 14) + (18 + 2)$ ꝛc. ꝛc.

Subtrahiren.

1) $80 - 20$; 2) $(50 + 40) - 30$; 3) $(98 + 2) - (36 + 4)$ ꝛc. ꝛc.

Multipliciren.

1) 10×6; 2) $2 \times 5 \times 6$; 3) $2 \times 5 \times 3 \times 3$ ꝛc. ꝛc.

Dividiren.

1) $\frac{120}{2}$ oder $120 : 2$; 2) $\frac{180}{3}$; 3) $30 : \frac{1}{2}$ ꝛc. ꝛc.

Gemischt.

1) $8 + 4 + 14 \times 7 - 30 + 2 \times 4 - \frac{84}{3}$ ꝛc. ꝛc.

Es können auch Produkte von Brüchen, kurz alle erdenklichen Zahlen als Glieder dieser Reihen vorkommen.

Löst man jedes der gegebenen Beispiele nach der Deutung der Rechnungszeichen auf, so wird immer die Zahl 60 erhalten werden.

§. 106.

Jeder der vorstehenden Zahlenausdrücke, welcher die Zahl 60 produzirt, heißt man einen Werth von 60. Natürlich ist es, daß diese Zahl noch unzählig viele andere haben kann.

Da nun aber alle diese Werthe in der Zahl 60 einmal aufgehen, so sind sie einander gleich, und die Verbindung

zweier solcher Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen (=) nennt man eine Gleichung. So sind z. B. Gleichungen:

1) $40 + 20 = 80 - 20$; 2) $10 \times 6 = \frac{120}{2}$; überhaupt jede Bezeichnung der Gleichheit zweier Werthe.

Die beiden Ausdrücke oder Werthe vor und nach dem Gleichheitszeichen heißen:

erster und zweiter Theil der Gleichung.

Die einzelnen Stücke, aus denen jeder dieser Theile zusammengesetzt ist, wollen wir Glieder des ersten, des zweiten Theils und im Allgemeinen: Glieder der Gleichung nennen.

Jeden Theil der Gleichung muß man als eine Zahl ansehen, deren Werth in den Gliedern dieses Theiles enthalten ist, und deren Veränderung auch die Glieder betrifft, aus denen sie besteht.

§. 107.

Die Fruchtbarkeit der Gleichungen geht nun aus folgenden kurzen Sätzen hervor:

1) zu Gleichem Gleiches addirt giebt Gleiches;
2) Von Gleichem Gleiches abgezogen läßt Gleiches;
3) Gleiches mit Gleichem multiplicirt, macht Gleiches;
4) Gleiches durch Gleiches dividirt, macht gleich viel.

Schwerlich würde sich ein Beweis für diese Behauptungen finden lassen, der deutlicher wäre, als die Wahrheit, welche in dem frühesten Akt der Wahrnehmung und Erkennung ihren Grund hat.

Wendet man die genannten Sätze auf die Gleichungen, deren beide Theile ja Gleiches sind, richtig an, und befleißigt sich in der arithmetischen Beschreibung der hieher einschlagenden Aufgaben, so muß sich der Nutzen bald kund thun, welcher durch die erwähnte Rechnungsart für's praktische Leben und für die Gründung einer mathematischen Bildung errungen wird.

§. 108.

Wie überhaupt in der gesammten Rechenkunst, so soll

auch jetzt durch die Gleichungen eine unbekannte Zahl gefunden werden, die gegebene Bedingungen erfüllt. Diese Bedingungen müssen so bestimmt seyn, daß sie sich durch Zahlen ausdrucken lassen.

Die unbekannte Zahl, oder diejenige, welche man bestimmen soll, benenne man immer mit dem Buchstaben x.

Wir haben zwar schon die einfachsten Gleichungen sowohl bei den Rechnungsarten mit ganzen Zahlen, als auch mit Brüchen theilweise angewendet, aber es dahin gestellt seyn lassen, ob die Bedeutung ihrer Form auch richtig verstanden worden ist; weßhalb es schon keine unnöthige Wiederholung ist, sie hier wieder kurz anzuführen, wenn es auch nicht dienen könnte, den stufenweisen Gang derselben zu zeigen.

§. 109.

Aufgabe. Wenn man 9 zu einer Zahl addirt, so erhält man 30; was ist die Zahl selbst?

Aufl. Nach der Annahme heißt die unbekannte Zahl x, zu ihr 9 addirt, giebt $x + 9$, und dieß soll der Werth von 30 seyn; deßhalb bezeichne man die Gleichheit durch:

1) $x + 9 = 30$ (heißt: x plus 9 ist gleich 30).

Jetzt kommt es natürlich darauf an, die Unbekannte x allein zu erhalten. Ihre Verbindung mit 9 besteht in Addition, dieser ist die Subtraction entgegengesetzt, darum ziehe man 9 von beiden Theilen der Gleichung, oder Gleiches von Gleichem ab; was man anzeigt durch:

2) $x + 9 - 9 = 30 - 9$.

(heißt: x plus 9 minus 9 ist gleich 30 minus 9.)

Vollzieht man die Subtraction wirklich, so hebt sich 9 gegen 9 in dem ersten Theile der Gleichung und in dem zweiten bleibt 21 übrig; daher nun 3) $x = 21$ (heißt: x ist gleich 21). Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, darf man nur dem Sinn der Aufgabe gemäß zu x oder jetzt 21 die Zahl 9 addiren. Man erhält daraus $30 = 30$ wie gefordert wurde.

§. 110.

Aufgabe. Wenn man von einer Zahl 15 abzieht, so bleibt 37 übrig; wie groß muß die erste Zahl seyn?

Aufl. Hier ist also die Differenz zwischen der unbekannten Zahl x und 15, der Zahl 37 gleich: was in der Zeichensprache heißt:

1) $x - 15 = 37$ (x minus 15 ist gleich 37).

Um hier x allein zu erhalten, muß es von 15 befreit werden, ohne daß aber etwas am Werth der Gleichung verloren geht. Es ist aber 15 durch Subtraction mit x verbunden, solcher ist Addition entgegengesetzt; daher addire man 15 zu beiden Theilen der Gleichung, oder Gleiches zu Gleichem, so entsteht:

2) $x - 15 + 15 = 37 + 15$,

und wirklich addirt, so heben sich die gleichen Zahlen mit entgegengesetzten Zeichen in dem ersten Theile der Gleichung auf, und x bleibt allein; im andern Theile aber giebt die Summe $= 52$; so, daß also:

3) $x = 52$ ist.

Setzt man nun den erhaltenen Werth für x an dessen Stelle in der Gleichung Nro. 1 und vollzieht die angezeigte Subtraction, so ist die Auflösung richtig, wenn in beiden Theilen Gleiches erscheint.

Probe: $52 - 15 = 37$;
$37 = 37$ also richtig.

§. 111.

Aufgabe. Welches ist die Zahl, deren Produkt mit 12 die Zahl 72 giebt?

Auflösung. Man nehme den unbekannten Faktor einstweilen unter dem Namen x als bekannt an, so ist der Werth des Produkts mit 12.

$12 \times x$ oder $12\,x$
(zwölf mal x)

Dieser Werth soll aber gleich 72 seyn, daher entsteht die Gleichung.

1) $12\,x = 72$.

Da es nun darauf ankommt, den Werth des einzelnen x zu erhalten, so muß die mit ihm durch Multiplication verbundene Zahl 12 unbeschadet des Werths der Gleichung weggeschafft werden; solches kann nun durch Division beider Theile mit 12 geschehen, da Division und Multiplication in ihren Wirkungen einander entgegengesetzt sind. Führt man dieses wirklich aus, so ist:

2) $\frac{12\,x}{12} = \frac{72}{12}$

(zwölf x divid. durch 12 ist gleich 72 divid. durch 12).

Nun hat man in dem ersten Theile einen Bruch $\frac{x}{12}$, dessen Zähler mit seinem Nenner multiplicirt, daher der Werth des Bruchs der Zahl des Zählers gleich ist. Oder: 12 ist in $12\,x$ ein x mal*) enthalten, und 72 dividirt durch 12 giebt 6; daher durch die Entwicklung entsteht:

3) $x = 6$ (x ist gleich 6).

Probe: Setzt man in die 1ste Gleichung diesen erhaltenen Werth von x, so erhält man

$12 \times 6 = 72$, oder $72 = 72$, wie verlangt wurde.

§. 112.

Aufgabe. Wenn man eine Zahl mit 7 dividirt, so ist der Quotient gleich 13; wie groß ist die Zahl selbst?

Aufl. Man nehme wieder an, diese Zahl seye in dem Werth x bekannt, so ist der Werth des Quotienten $\frac{x}{7}$; solcher soll aber gleich 13 seyn, daher die Gleichung:

1) $\frac{x}{7} = 13$

(x dividirt durch 7 ist gleich 13).

*) Der Faktor 1 wird nie angedeutet, weil ja jede Zahl schon an und für sich das Vielfache desselben ist.

Damit nun die x von 7, durch welche sie dividirt ist, befreit werde, ohne daß dem Werth der Gleichung Eintrag geschieht, so multiplicire man beide Theile mit 7, d. h. Gleiches mit Gleichem, so wird sich die Wirkung der Division von x in dem ersten Theile der Gleichung aufheben, weil Multiplication und Division einander entgegengesetzt sind; daher die Gleichung entsteht: $\frac{x}{7} \times 7 = 13 \times 7$ (x dividirt durch 7 und mit 7 multiplicirt ist gleich 13 mal 7).

Oder: 2) $\frac{7x}{7} = 91.$

Der Zähler des Bruchs $\frac{x}{7}$ ist hier wieder mit seinem Nenner multiplicirt, demnach ist das Produkt gleich dem Zähler als ganzer Zahl. Oder: 7 ist in $7x$ wieder x mal enthalten und daher wird:

3) $x = 91.$

Probe: den gefundenen Werth für x in die 1ste Gleichung gesetzt, giebt:

$\frac{91}{7} = 13$, d. h. $13 = 13$, wie seyn sollte.

§. 113.

In den angenommenen Fällen waren immer sämtliche Bedingungen in der unbekannten Zahl enthalten; kehren wir nun die Fragen um, und betrachten die Unbekannte als einen Theil dieser Bedingungen, welche ein gegebenes Resultat erzeugen sollen, so können wir dieß in folgenden einfachen Beispielen vornehmen.

Aufgabe. Man soll die Zahl suchen, welche zu 93 addirt, die Summe 207 giebt; welches ist die Zahl selbst?

Aufl. Die Unbekannte als x angenommen, giebt mit 93 addirt, den Werth der Summe $x + 93$. Dieser Werth soll aber gleich 207 seyn, daher die Gleichung:

1) $x + 93 = 207.$

Schafft man die mit x verbundenen 93 durch Subtrak-

tion in beiden Theilen der Gleichung hinweg, um x allein zu erhalten, so ist

$$2)\ x + 93 - 93 = 207 - 93,$$

und reduzirt:

$$3)\ x = 114.$$

Probe: in die 1ste Gleichung den gefundenen Werth für x gesetzt:

$$114 + 93 = 207 \text{ oder } 207 = 207.$$

§. 114.

Aufgabe. Es soll von 416 so viel abgezogen werden, daß der Rest gleich 308 ist; wie groß muß der Subtrahend seyn?

Aufl. Zieht man die Unbekannte x von 416 ab, so ist der Werth gleich $416 - x$; diesen gleich 308 gesetzt, giebt die Gleichung:

$$1)\ 416 - x = 308.$$

Nun ziehe man auf beiden Seiten die Zahl 308 ab, so erhält man: $416 - 308 - x = 308 - 308$ oder reduzirt:

$$2)\ 108 - x = 0.$$

Weil nun x im ersten Theile der Gleichung negativ ist und man es positiv haben soll, so addire man solches zu beiden Theilen der Gleichung, so erhält man: $108 - x + x = x$. Im ersten Theile hebt sich aber $+ x$ und $- x$ gegenseitig auf, daher:

$$3)\ 108 = x\ ^*).$$

---

*) Hätte man in der 2ten Gleichung das x in dem ersten Theile weggelassen und mit verändertem Zeichen in den andern Theil gesetzt, so wäre auf eine einfachere Weise die Addition vollzogen gewesen. — Ueberhaupt läßt sich für die Entfernung eines Gliedes aus einem Theile der Gleichung die Regel aufstellen: man lasse das Glied in dem Theile der Gleichung, aus welchem es verschwinden soll, ganz weg und bringe es mit einer der vorigen entgegengesetzten Funktion, d. h. mit entgegengesetztem Rechnungszeichen in den andern Theil, so daß aus:

Probe: in Nro. 1 den gefundenen Werth für x gesetzt, wird: $416 - 108 = 308$

$308 = 308.$

§. 115.

Aufgabe. Man will wissen, mit welcher Zahl 13 multiplicirt werden muß, wenn das Produkt 650 geben soll.

Aufl. 1) $13\,x = 650.$

Um x allein zu erhalten, wird mit 13 dem Faktor des einfachen x auf beiden Seiten der Gleichung dividirt; also:

2) $\frac{13\,x}{13} = \frac{650}{13}$; da nun 13 in $13\,x$ einmal x enthalten, und 13 in 650 dividirt, gleich 50 ist, so hat man:

3) $x = 50.$

Probe mittelst der ersten Gleichung:

$13 \cdot 50 = 650$, d. i. $650 = 650.$

§. 116.

Aufgabe. Man solle die Zahl finden, welche in 272 dividirt den Quotienten 17 giebt.

Aufl. Die Zahl 272 durch die Unbekannte dividirt, ist gleich $\frac{272}{x}$ und diesen Werth gleich 17 gesetzt, giebt:

1) $\frac{272}{x} = 17.$

(plus) + wird — (minus)
(minus) — „ + (plus)
(mal multiplicirt) × · } „ { : — (dividirt)
(dividirt) — / : } „ { × · (mal multiplicirt)

Von der Richtigkeit dieser Regel wird man sich bei Auflösung dieser Aufgaben überzeugen können.

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit x, so erhält man: 2) $\frac{272\,x}{x} = 17\,x$, aber $\frac{272\,x}{x}$ ist gleich 272. Daher hat man: 3) $272 = 17\,x$.

Jetzt entferne man 17 durch Division beider Theile von x, s. i.: 4) $\frac{272}{17} = x$ und die Division wirklich im ersten Theile verrichtet, giebt:

5) $16 = x$ oder $x = 16$.

Probe mittelst der ersten Gleichung.

$\frac{272}{16} = 17$, d. i. $17 = 17$.

§. 117.

Wir wollen nun die Auflösungen solcher Fälle behandeln, wenn die Unbekannte in einem Theile der Gleichung, oder auch in beiden zugleich mit Zahlwerthen verschiedener Rechnungsfunktionen verbunden ist. — Die Aufgabe fordert jeder Zeit, den Werth der Unbekannten x zu finden, oder x in der Figur einer Gleichung allein darzustellen. Letzteres erreicht man dadurch, daß nach und nach die Glieder desjenigen Theils der Gleichung, in welchem die x vorkommt, oder in welchem ihr größerer Werth ist, auf die in der Anmerkung des §. 114 angegebene Weise, entfernt werden;

z. B. es soll der Werth von x aus der Gleichung:

1) $4\,x + 3 \times 5 - 7 = \frac{80}{9} + 2$ entwickelt werden. — Man fange damit an, in dem zweiten Theile die gleiche Benennung herzustellen, indem man die ganze Zahl 2 mit dem Nenner des Bruchs $\frac{80}{9}$ multiplicirt, und dadurch erhält:

2) $4\,x + 3 \times 5 - 7 = \frac{80 + 18}{9}$.

Hierauf löse man die bezeichneten Funktionen der Zahlen auf, und sage im ersten Theile: 3 mal 5 ist 15 und 7 davon abgezogen bleibt 8. Im zweiten Theile heißt es: 80 und 18 Neuntel geben $\frac{98}{9}$. Diese Entfaltung, Reduktion und Be-

nennung hat den Werth der Gleichung nicht geändert, aber auf folgende Gestalt gebracht:

$$3)\ 4x + 8 = \frac{98}{9}$$

Nun schaffe man den Divisor des zweiten Theiles dadurch weg, daß man ihn in solchem verschwinden läßt und in den andern Theil mit der entgegengesetzten Funktion, d. h. als Multiplicator bringt, woraus $9(4x + 8) = 98$ *) entsteht. Entfaltet man die Multiplication des 1ten Theils, so hat man:

$$4)\ 36x + 72 = 98.$$

Man lasse 72 verschwinden und bringe es mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens: $5)\ 36x = 98 - 72 = 26.$

Es ist jetzt x nur noch mit 36 durch Multiplication verbunden, daher man 36 in dem ersten Theile verschwinden läßt, und als Divisor in den zweiten Theil bringt, wodurch endlich der Werth von

$$6)\ x = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \text{ wird.}$$

Probe, mittelst der 4ten Gleichung:

$$36 \times \tfrac{13}{18} = 26.$$
$$\tfrac{468}{18} = 26 \text{ d. i.}$$
$$26 = 26 \text{ w. g. w.}$$

§. 118.

Es seye die Gleichung:

$1)\ \frac{6}{7}x + 50 - 13 = \frac{3}{4} + 6x$ gegeben, man soll den Werth von x finden.

Die gleiche Benennung in jedem Theile hergestellt, wird

$$2)\ \frac{6x + 350 - 91}{7} = \frac{3 + 24x}{4}.$$

Im ersten Theile das Gleichartige reduzirt:

---

*) Wie hier $9(4x + 8)$ wird immer die Multiplication einer Zahl mit einer Größe angezeigt, die aus mehreren Gliedern besteht. Es muß nämlich der ganze Werth des 1sten Theils mit 9 multiplicirt werden.

3) $\frac{6x + 259}{7} = \frac{3 + 24x}{4}$.

Jeden Divisor weggelassen und zu einem Multiplicator des andern Theils gemacht, erhält man: $4(6x\ 259) = 7(3 + 24x)$ und die Multiplication entfaltet:

4) $24x + 1036 = 21 + 168x$.

Es zeigt sich nun in dem 2ten Theile der Gleichung der größere Werth von x, daher man diesen von 21 *) befreien, und das Produkt von x im ersten Theile mit demselben in Verbindung bringen muß; demgemäß erhält man allmählich:

5) $24x + 1036 - 21 = 168x$ und

6) $1015 = 168x - 24x$.

Von $168x$ und $24x$, ist aber x ein gemeinschaftlicher Faktor (man könnte auch sogleich abziehen, wornach der Rest $144x$ bliebe, wenn man nicht im Auge hätte, die allgemeinen Ausdrücke vorzubereiten); daher man seine Multiplication mit 168 und 24 außer Parenthese anzeigen kann; nämlich $(168-24)x$ heißt: 168 und — 24, oder die Differenz dieser Zahlen soll mit x multiplicirt werden; es ist aber auch (168—24) ein Faktor von x. Nach diesem wird die Gleichung:

7) $1015 = (168 - 24)\ x = 144x$.

Schafft man endlich auch den Faktor 144 von x weg, so ist: 8) $\frac{1015}{144} = x = 7\frac{7}{144}$.

Probe nach der 6ten Gleichung.

$1015 = 168 \times \frac{1015}{144} - 24 \times \frac{1015}{144}$ ist so viel als:

$1015 = \frac{170520 - 24360}{144}$ oder

$1015 = \frac{146160}{144}$ und endlich

$1015 = 1015$, demnach richtig.

---

*) Jede Größe, die Vorne an einem Ausdrucke steht und kein Zeichen hat, wird als positiv oder unter dem Zeichen + stehend, angenommen.

In den gegebenen Beispielen sind nun alle Fälle enthalten, auf welche wir bei Abhandlung der folgenden Lehren stoßen können.

---

§. 119.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Ein Verhältniß heißt im Allgemeinen: die Vergleichung zweier Zahlen unter sich. Diese Vergleichung kann aber nur auf zweierlei Art geschehen, nämlich entweder:

1) man will wissen, wie viel Einheiten die größere Zahl mehr hat als die kleinere; oder
2) man soll untersuchen, wie oft die Einheiten der kleinern Zahl in denen der größern enthalten sind.

Die unter Nro. 1 aufgestellte Forderung kann nur durch Subtraktion der kleinern von der größern erfüllt werden, und über diese Art von Verhältnissen wollen wir uns zunächst verbreiten *).

Die bildliche Darstellung, oder überhaupt der Vergleich solcher Zahlen in genannter Beziehung nennt man: ein arithmetisches Verhältniß; den Subtrahend und Minuend (auf diese zwei Zahlen lassen sich auch zwei beliebige Glieder-Summen bringen) heißt man zusammen: Glieder des arithmetischen Verhältnisses, und der Unterschied, welcher zwischen ihnen Statt hat, wird die Differenz des arithmetischen Verhältnisses genannt**); z. B.

$$9 - 4$$

ist ein arithmetisches Verhältniß, dessen Glieder 9 und 4 sind und zur Differenz die Zahl 5 hat.

---

*) Die andere Gattung von Verhältnissen wird später abgehandelt und erklärt.

**) Jedes Subtraktions-Beispiel ist schon an und für sich ein arithmetisches Verhältniß.

§. 120.

Ist die Differenz zweier solcher Verhältnisse gleich, so sind auch ihre Werthe einander gleich.

Drückt man dieses in einer Gleichung aus, so heißt solche eine arithmetische Proportion;

z. B. 9 — 4 = 15 — 10 ist eine arithmetische Proportion, weil 5 die Differenz oder der Werth beider Verhältnisse ist.

Es werden nun die Glieder der zwei Verhältnisse: Glieder der arithmetischen Proportion, und zwar von der Linken zur Rechten, 1tes, 2tes, 3tes und 4tes Glied genannt und heißen noch überdieß,

das 1te und 4te Glied: äußere Glieder und
„ 2te und 3te „ mittlere Glieder.

§. 121.

Untersucht man aber den Zusammenhang dieser 4 Glieder näher und benennt das 1te Gl. mit a, das 2te mit b, das 3te mit c und das 4te mit f, aber die Differenz mit d, so wird man finden, daß sie aus folgenden Bestandtheilen bestehen:

Ites Glied.	IItes Glied	IIItes Glied.	IVtes Glied.
aus der Summe:		aus der Summe:	
1) des 2. Glieds	aus sich selbst	1) des 4. Glieds	aus sich selbst
2) der Differenz		2) der Differenz	
a = b + d	b = b	c = f + d	f = f

Addirt man die zwei äußern Glieder, und wieder die beiden mittlern zusammen, so erhält man für die Summe:

1) der äußern a + f = b + d + f und
2) der mittlern b + c = b + d + f; welche Werthe einander ganz gleich sind; daher der Satz entsteht:

„In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe

„der beiden äußern Glieder gleich der Summe der bei„den mittlern.“

Dieſe Wahrheit hätte man auch aus der Proportion als Gleichung betrachtet auf kürzerem Wege ableiten können, wenn es nicht darum zu thun geweſen wäre, den ſynthetiſchen Weg anderer Arithmetiker zu erklären: denn

aus $9 - 4 = 15 - 10$ wird:

$$9 + 10 = 15 + 4$$
$$19 = 19.$$

---

§. 122.

Aufgabe. Es wird gefordert, zu den drei erſten Gliedern einer arithmetiſchen Portion das vierte zu finden.

Die Glieder ſeyen der Ordnung nach:
14, 9, 5 und das unbekannte 4te heiße einſtweilen x, wie in den Gleichungen; ſo iſt die Proportion: 1) $14 - 9 = 5 - x$. So man nun weiß, daß die Summe der beiden äußern Glieder gleich der Summe der beiden mittlern iſt, ſo hat man die gleichen Werthe:

$$14 + x = 9 + 5,$$

dieſe Gleichung aufgelöst, giebt:

$$x = 14 - 14 = 0 \text{ dem 4ten Glied},$$

und die vollſtändige Proportion wäre nun:

$$2)\ 14 - 9 = 5 - 0,$$

worin ſich wirklich die gleiche Differenz 5 zeigt.

Aufgabe. Es ſeyen wieder drei Glieder einer arithmetiſchen Proportion gegeben, und zwar: das 1te $= 27$, das 2te $= 16$, und das 4te $= 5$; man ſoll das 3te ſuchen, welches vorderhand x heiße, ſo iſt:

$$1)\ 27 - 16 = x - 5$$

die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich geſetzt:

$$16 + x = 27 + 5.$$

Diese Gleichung entwickelt,

entsteht: $x = 27 + 5 - 16$, dieses reduzirt,

giebt: $x = 16$.

Die vollständige Proportion wäre also:

2) $27 - 16 = 16 - 5$.

In den beiden Verhältnissen ist die Differenz gleich 11, daher die Proportion richtig.

§. 123.

Eine Proportion, wie die letzte, deren mittlere Glieder einander gleich sind, nennt man eine fortlaufende oder eine stetige arithmetische Proportion, zum Unterschied von solchen, deren mittlere Glieder verschieden sind, und die getrennte arithmetische Proportionen genannt werden.

Wird immer nur ein Glied der arithmetischen Proportion gesucht, so ist die Behandlung der Aufgabe immer die nämliche, wie bei den vorstehenden Beispielen; es wird jedesmal an die Stelle des unbekannten, das Zeichen x gesetzt, die Gleichung der Werthe formirt, und aus derselben der Werth für x nach den Regeln entwickelt.

§. 124.

Sind aber nur zwei Glieder gegeben, so können dieß keine andern, als entweder die beiden äußern, oder die beiden mittlern seyn, wenn die Aufgabe einen bestimmten Werth enthalten soll; denn im andern Falle wäre die Anzahl der Auflösungen unendlich. Aus eben den Gründen ist es aber auch nöthig, daß die zwei unbekannten Glieder einander gleich, also beide x sind.

§. 125.

Aufgabe. Man soll zu den zwei Gliedern 17 und 25 einer arithmetischen Proportion die zwei andern suchen.

Aufl. Es ist nun ganz gleichgültig, für welches Paar

Glieder man diese gegebenen halten will, für das äußere oder mittlere; um aber dieses einsehen zu lernen, werden wir sie in dieser doppelten Beziehung betrachten:

1) Seyen 17 und 25 die mittleren Glieder, so ist die Proportion:

1) $x - 17 = 25 - x$; die Werthe der Summen gebildet: $x + x = 17 + 25$ oder

$$2 \times x = 42.$$

Von x die 2 entfernt und damit 42 dividirt, giebt:

$$x = \frac{42}{2} = 21.$$

Nach diesem wäre die vollständige Proportion:

2) $21 - 17 = 25 - 21$,

worin die gleiche Differenz 4 herrscht.

2) Seyen 17 und 25 die äußern Glieder, so ist:

$$17 - x = x - 25$$
$$x + x = 17 + 25$$
$$2x = 42$$
$$x = 21,$$

und die vollständige Proportion:

$$17 - 21 = 21 - 25,$$

worin rückwärts die nämliche Differenz, wie vorher, besteht.

§. 126.

Abgesehen davon, daß man in dem vorstehenden §. aus den zwei verschiedenen Annahmen gleiche Werthe für x erhalten hat, und daher die hiezu verwendeten Proportionen einander gleich seyn müssen, so soll nun gezeigt werden, daß der Werth einer arithmetischen Proportion sich nicht ändert, wenn man folgende Verwechslungen mit den vier Gliedern vornimmt:

1) das 1te mit dem 2ten, und das 3te mit dem 4ten *), weil die Summe der mittlern Gliedern gleich

*) Man nennt auch in Rücksicht der zwei Verhältnisse, das 1te und 3te Glied: vordere, und das 2te und 4te hintere Glieder der Proportion.

der Summe der äußern bleibt, wovon man sich durch eine Zusammenstellung der im §. 121 angegebenen Theile überzeugen kann; aber auch die Gleichung giebt für die Proportion: $9 - 4 = 15 - 10$, nach der verlangten Verwechslung

$$4 - 9 = 10 - 15,$$

die Werthe: . . . . $4 + 15 = 9 + 10$, das heißt

$$19 = 19, \text{ wie vorher.}$$

2) Das 1te mit dem 3ten, und das 2te mit dem 4ten kann ebenfalls nach §. 121, aber auch wieder nach der bemerkten Verwechslung der vorigen Proportion aus der Gleichung eingesehen werden;

denn aus $15 - 10 = 9 - 4$ erhält man

die Werthe $15 + 4 = 10 + 9$ oder

$$19 = 19.$$

3) Das 2te mit dem 3ten. Gleichfalls nach §. 121 und der Gleichung der Werthe, wenn die genannte Verwechslung geschehen ist; denn verwechselt erhält man:

$$9 - 15 = 4 - 10, \text{ woraus}$$

$$9 + 10 = 15 + 4$$

d. i. $19 = 19$ wird.

4) Das 1te mit dem 4ten. Aus den vorigen Gründen.

$$10 - 4 = 15 - 9$$

$$10 + 9 = 4 + 15$$

$$19 = 19.$$

5) Das 1te mit dem 4ten und das 2te mit dem 3ten. Zunächst nach §. 121 und nach der Gleichung:

$$10 - 15 = 4 - 9$$

sind die Werthe $10 + 9 = 15 + 4$, woraus wieder

$$19 = 19.$$

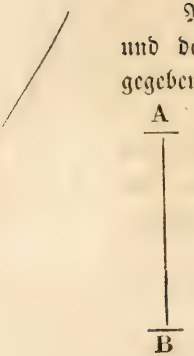
§. 127.

Man kann also in jeder arithmetischen Proportion, zu welcher nur zwei Glieder gegeben sind, und die zwei andern gesucht werden sollen, diese gesuchten Glieder immer als die

mittleren ansehen, wie sie es in §. 125 2) sind. Diese Glieder sind aber einander gleich, daher beide bekannt sind, wenn man das eine weiß, weßwegen für derlei Aufgaben der Sprachgebrauch lautet: das mittlere Glied einer arithmetischen Proportion zu suchen; oder aber, weil dieses mittlere Glied dadurch gefunden worden, indem man die Summe der zwei gegebenen Zahlen durch die Anzahl der Glieder 2 dividirt hat, so ist es noch gebräuchlicher, zu sagen: es soll das arithmetische Mittel zu zwei Zahlen gesucht werden.

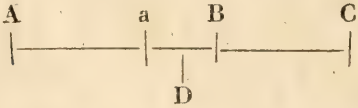
§. 128.

Man kann sich wieder durch eine Figur die Bewandtniß und den Zusammenhang eines arithmetischen Mittels zu zwei gegebenen Zahlen begreiflicher machen; z. B.:



versteht man unter der größern Zahl die Länge einer Linie AB, und unter der kleinern eine Länge BC; man will nun den Werth der Linie wissen, die um so viel kürzer gegen die Länge AB ist, als sie die Linie BC übertrifft; oder was das Nämliche ist, welche sie zusammen 2 mal ausmißt, daher diese Zusammensetzung in der Mitte theilt:

Trägt man die beiden gegebenen Längen auf eine Linie AC neben einander, wie hier:



und halbi t die dadurch entstandene Länge AC, so soll laut der Rechnung AD = DC seyn, was auch hier nach der Construction der Fall ist; daß aber die Mitte D gleichweit von den Enden der Linien AB und BC absteht, und zwar so: um wie viel sie in die größere hereinfällt, um so viel fällt sie über die kleinere hinaus und vermittelt dadurch ihren Unterschied, soll nun bewiesen werden.

Denkt man sich die kleinere Linie BC auch von dem Ende A der AC an, auf diese gelegt, so wird aB den Unterschied zwischen ihr und der größern AB vorstellen; da aber Aa=BC gleichweit von den Enden A und C nach a und B reichen, so muß der Unterschied aB in der Mitte der Linie AC liegen und sein Halbirungspunkt auch der von dieser Länge, also D seyn. Nun ist aD = DB der Hälfte des Unterschieds, und

$$AB - AD = AD - BC \text{ d. i.}$$
$$DB = DB,$$

hieraus läßt sich auch die Regel für Vermittlung zweier verschiedener Größen ableiten: man halbire ihren Unterschied, nehme von der größern die Hälfte des Unterschieds hinweg und setze sie der kleinern zu*).

§. 129.

Im praktischen Leben ist etwas Aehnliches wie das arithmetische Mittel, auch aus mehr als zwei, sogar beliebig vielen Zahlen, unter dem Namen Durchschnittszahl im Gebrauch. Man nimmt für solche den Quotienten an, den man erhält, wenn man die Summe aller betreffenden Zahlen durch ihre Anzahl dividirt; z. B. aus den 5 Zahlen

643
588
733
509
499
2972 Summe.

ist die Durchschnittszahl =

$$\frac{\text{Summe der Werthe}}{\text{Anzahl der Zahlen}} = \frac{2972}{5} =$$
$$= 594\frac{2}{5}.$$

*) Ein Beispiel hiefür wäre, wenn das arithmetische Mittel von 15 und 27 gebildet werden soll. Der Unterschied dieser Zahlen ist 12, hievon die Hälfte = 6. Diese Hälfte zu 15 addirt, giebt 21 und von 27 abgezogen giebt wieder 21.

Die arithmetischen Verhältnisse finden besonders ihre Anwendung bei Berechnung der Logarithmen.

§. 130.

Hieher kann noch gerechnet werden:

1) Die Summe und Differenz zweier Zahlen addirt, giebt das Doppelte der größern.

Beweis. Addirt man zur Summe der zwei Zahlen anstatt der Differenz, die größere allein, so hat man zweimal die größere und einmal die kleinere; man hätte aber statt der größern nur ihren Ueberschuß über die kleinere addiren sollen, daher die Summe um die letztere zu groß ist. Nimmt man sie nun aus derselben hinweg, so bleibt noch die doppelte größere übrig; z. B. die Zahlen seyen 19 und 7,

so ist die Summe = 19 + 7 = 26
" Differenz = 19 − 7 = 12

addirt = 38 = 2 × 19.

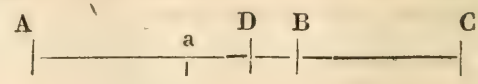
2) Zieht man von der Summe zweier Zahlen ihre Differenz ab, so ist der Rest das Doppelte der kleinern Zahl.

Beweis. Von der Summe der zwei Zahlen statt der Differenz die größere allein abgezogen, bleibt die kleinere übrig; man hat aber um die kleinere zu viel abgezogen, daher muß sie zum Rest addirt werden, wodurch man 2 mal die kleinere hat; z. B. die zwei Zahlen seyen 20 und 8;

so ist ihre Summe = 20 + 8 = 28.
" Differenz = 20 − 8 = 12.

abgezogen bleibt 16 = 2 × 8.

Die Wahrheit dieser zwei Eigenschaften läßt sich auch aus der letzten Figur beweisen:



1) Die Summe der zwei Zahlen ist $= AB + BC$,
die Differenz " " " $= aB$
addirt man diese Werthe, so erhält man:
$$AB + BC + aB$$
aber weil $BC = Aa$, s. i.
$$BC + aB = Aa + aB = AB$$
und $AB + BC + aB = AB + AB = 2\,AB$ der größern.

2) Es ist $AB + BC = AC$, hievon die Differenz aB hinweggenommen, bleibt noch Aa und BC; es ist aber $Aa = BC$, daher $Aa + BC = 2BC$ der kleinern.

Nimmt man die Hälften zweier Größen als die Einheiten an, so folgt aus den letzten Sätzen: addirt man die halbe Summe zweier Größen zu ihrer halben Differenz, so giebt die Summe die größere von beiden; subtrahirt man aber die halbe Differenz zweier Größen, von ihrer halben Summe, so giebt der Rest die kleinere der beiden Größen.

§. 131.

Nehme man den Faden wieder auf, welchen wir in §. 119 Nro. 2 fallen ließen.

Wenn die Größe einer Zahl durch die Größe einer andern ausgemessen, oder untersucht werden soll, wie oft die eine in der andern enthalten ist, so heißt es: diese zwei Zahlen stehen in einem *geometrischen Verhältniß*.

Diese Benennung mag von der Aehnlichkeit des Verfahrens mit der Ausmessung der Linien herrühren, welche in der Geometrie abgehandelt wird.

Der Werth eines geometrischen Verhältnisses wird der Erklärung gemäß durch Division einer Zahl in die andere gefunden.

Dieser Werth ist gar nichts anderes, als der Ausdruck einer Größe in einem Zahlensysteme, in welchem eine andere

beliebige als Einheit angenommen wird; z. B. der Werth von 36 verändert sich in 3, wenn 12 die Einheit seyn soll.

Diesen Werth nennt man hier den Exponenten des Verhältnisses. Es ist dieß gleichbedeutend mit dem, was früher Quotient geheißen hat. Die zwei Zahlen, welche ein geometrisches Verhältniß bilden, nennt man Glieder des geometrischen Verhältnisses.

Die Glieder eines geometrischen Verhältnisses werden durch das Zeichen der Division (:) mit einander verbunden. Der Dividend steht links und der Divisor rechts von diesem Zeichen. Ersteren heißt man erstes oder vorderes Glied, und letzteren zweites oder hinteres Glied des geometrischen Verhältnisses; z. B. 3 : 5
wird ein geometrisches Verhältniß genannt, von dem 3 das 1ste oder vordere und 5 das 2te oder hintere Glied ist. — Zur Bezeichnung dieses Verhältnisses drückt man sich aus:

3 dividirt durch 5, oder aber 3 verhält sich zu 5; wobei man den Werth des Exponenten im Auge hat.

§. 132.

Sind die Exponenten zweier geometrischen Verhältnisse einander gleich, so kann man auch ihre Werthe, d. h. diese Verhältnisse selbst einander gleich setzen. Eine solche Gleichung wird eine geometrische Proportion genannt.

Der gleiche Exponent der Verhältnisse heißt nun Exponent der geometrischen Proportion. Die Glieder der beiden Verhältnisse heißen jetzt von der Linken zur Rechten: 1tes, 2tes, 3tes, 4tes Glied der geometrischen Proportion. Insbesondere werden das 1te und 4te, äußere Glieder, das 2te und 3te, mittlere Glieder, das 1te und 3te, vordere Glieder und das 2te und 4te, hintere Glieder der geometrischen Proportion genannt;

z. B. die Verhältnisse: 1) 6 : 3 und 2) 8 : 4 haben den gleichen Exponenten 2; setzt man nun die Werthe dieses

Exponenten, was die Verhältnisse selbst sind, einander gleich, so ist 6 : 3 = 8 : 4; und solches ist eine geometrische Proportion.

Diese Proportion wird gelesen: 6 dividirt durch 3, ist gleich 8 dividirt durch 4; oder gewöhnlicher: 6 verhält sich zu 3, wie sich verhält 8 zu 4.

Die Glieder der aufgestellten Proportion werden auf folgende Art benannt:

1) die Zahl 6 erstes Glied		5) 6 und 4 äußere Glieder	
2) „ „ 3 zweites „		6) 3 „ 8 mittlere „	
3) „ „ 8 drittes „		7) 6 „ 8 vordere „	
4) „ „ 4 viertes „		8) 3 „ 4 hintere „	

§. 133.

Der Exponent kann jede beliebige Zahl, deßhalb nicht immer eine ganze, sondern auch eine gebrochene seyn. — Sind die beiden mittlern Glieder einander gleich, so heißt die Proportion eine stetige, oder fortlaufende, wo nicht, eine getrennte oder gesonderte Proportion.

§. 134.

Untersucht man die gegenseitigen Werthe der Glieder einer geometrischen Proportion, und nimmt an, das 1te seye = a, das 2te = b, das 3te = c, das 4te = d und der Exponent = e, so ergiebt sich folgende Vergleichung:

I. Glied.	II. Glied.	III. Glied.	IV. Glied.
besteht: aus dem Produkt des 2ten Glieds und dem Exponenten.	besteht: aus sich selbst	besteht: aus dem Produkt des 4ten Glieds und dem Exponenten.	besteht: aus sich selbst
a = b . e	b = b	c = d . e	d = d

Multiplicirt man die beiden äußern und wieder die bei-

den mittlern Glieder miteinander, so erhält man die Produkte:

1) Produkt der äußern Glieder $a \times d = b \cdot e \cdot d.$

2) „ „ mittlern „ $b \times c = b \cdot e \cdot d.$

Die erhaltenen Werthe sind aber einander ganz gleich, daher die Regel folgt:

„In einer geometrischen Proportion ist das Produkt „der beiden äußern Glieder gleich dem Produkt der bei„den mittlern.“

Nach dieser Regel ist es nun möglich, jedes unbekannte Glied der Proportion aus den übrigen zu finden; auch wird man sich durch betreffende Produkte bälder von der Statthaftigkeit einer Proportion überzeugen können, als durch Vergleichung der Exponenten, im Falle diese Brüche seyn sollten.

§. 135.

Aufgabe. Es seyen der Ordnung nach die 3 Glieder 6, 9, 4 gegeben, man soll das 4te suchen.

Auflösung. Man benenne das unbekannte 4te Glied einstweilen mit x und bilde die Proportion:

1) $6 : 9 = 4 : x.$

„(6 verhält sich zu 9, gleichwie 4 zu x sich verhält).“

Da man nun weiß, daß das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkt der mittlern seyn muß, so setze man diese Werthe in eine Gleichung, woraus:

$6 \times x = 9 \times 4$ wird; oder

$6x = 36.$

Das x von 6 befreit, giebt:

$$x = \frac{36}{6} = 6;$$

demnach die vollständige Proportion:

2) $6 : 9 = 4 : 6.$

§. 136.

Aufgabe. Es seyen die beiden vordern Glieder 5 und

7, und der Exponent 3 einer geometrischen Proportion gegeben, man soll die beiden hintern Glieder finden.

Auflösung. Nach §. 134 ist das erste Glied gleich dem Produkt des 2ten Gliedes mit dem Exponenten; daher, wenn man einstweilen das 2te mit x benennt:

$$3 \cdot x = 5, \text{ woraus}$$

$x = \frac{5}{3}$ das 2te Glied sich ergiebt.

Ebenso wurde dort gezeigt, daß das 3te Glied aus dem Produkt des 4ten und dem Exponenten besteht, nennt man das 4te einstweilen y, s. i.

$$3\,y = 7, \text{ hieraus}$$

$y = \frac{7}{3}$ das 4te Glied; und nun die vollständige Proportion:

$$5 : \tfrac{5}{3} = 7 : \tfrac{7}{3}.$$

Will man diese Proportion in ganzen Zahlen ausdrucken, so bringe man zunächst die vordern Gliedern auf gleiche Benennung mit den hintern, wodurch sich ergiebt:

$$\tfrac{15}{3} : \tfrac{5}{3} = \tfrac{21}{3} : \tfrac{7}{3}.$$

Da nun die gleiche Benennung nichts zur Proportion beiträgt, indem jederzeit Gleichnamigkeit der Glieder vorausgesetzt wird, so lasse man solche weg, und man hat:

$$15 : 5 = 21 : 7.$$

§. 137.

In vorstehenden zwei Aufgaben sind alle möglichen Fälle enthalten, die man sich denken kann, um aus 3 gegebenen Stückeu das 4te einer Proportion zu finden.

Sind die zwei Glieder eines Verhältnisses gegeben, so kann man den Exponenten nicht noch einmal als einen gegebenen Theil rechnen, weil er ja durch das Verhältniß selbst ausgedruckt wird; daher in diesem Falle die Aufgabe noch nicht bestimmt ist, sondern hiezu noch ein Glied des zweiten Verhältnisses erfordert wird.

Heißt es im Allgemeinen, zu drei Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl zu suchen, so setzt man x gewöhn-

lich als viertes Glied. Sind aber blos zwei Zahlen gegeben, zu denen die zwei übrigen Glieder gefunden werden sollen, so müssen diese einander gleich seyn, oder die Proportion hat keinen bestimmten Werth. — Man druckt demnach diese zwei Glieder mit der gleichen Unbekannten x aus, und sieht sie als die mittlern an, damit man eine stetige Proportion habe. Weil in diesem Falle wieder beide unbekannte Glieder gefunden sind, wenn man eines kennt, da sie sich gleichen, so wird im Allgemeinen die Aufgabe dahin ausgesprochen: es soll die mittlere geometrische Proportionalzahl gesucht werden *); z. B.

„Welches ist die mittlere geometrische Proportionalzahl „zu den zwei Zahlen 6 und 20?"

Man setze: $6 : x = x : 20$, und die Werthe formirt giebt $6 \times 20 = x \cdot x$ oder,

$$120 = x^2$$

Hier bedeutet x^2, es seye x in das Quadrat erhoben, nämlich mit sich selbst multiplicirt. Der Werth für x^2 ist die Zahl 120 und heißt deßhalb Quadratzahl. Wenn man nun wüßte, welche Zahl mit sich selbst multiplicirt 120 giebt, so würde man auch den Werth von x kennen. Das Verfahren, die Zahl zu finden, aus welcher eine solche Quadratzahl entstanden ist, und die man in dieser Beziehung die Quadrat-Wurzel nennt, ist unter dem Namen: Quadrat-Wurzel Ausziehen, begriffen. Diese Rechnungsart gehört noch nicht hieher, und wir wollen uns deßwegen nicht mit dergleichen Aufgaben befassen, zu welcher dieselbe nöthig wäre. Es genüge hier, zu bemerken, daß in vorstehendem Beispiele

$x = 10\frac{954451....}{1000000....}$ seyn würde.

§. 138.

Wenn in jeder geometrischen Proportion das Produkt

*) Sie ist in dem ersten Gliede ebenso oft enthalten, als das vierte in ihr, und bildet daher das Mittel, zwischen dem Verhältnisse des ersten und vierten Glieds.

der beiden äußern Glieder gleich dem Produkte der beiden mittlern seyn muß, so ist auch nothwendig, daß aus zwei gleichen Produkten auch wieder eine geometrische Proportion gebildet werden kann. Sollen die Glieder dieser Proportion verschieden seyn, so muß sich das Produkt in wenigstens drei einfache Faktoren zerlegen lassen, wovon immer je zwei für ein Glied zusammengezogen werden. Ein Faktor wird demnach das gemeinschaftliche Maaß zwischen dem einfachen Faktor des ersten Produkts und dem zusammengesetzten des zweiten und umgekehrt, oder nach Bildung der Proportion der Exponent von dieser seyn.

Es läßt sich die Verwandlung eines Produkts mit 3 einfachen Faktoren in eine geometrische Proportion auch so betrachten: man nehme den einfachen und zusammengesetzten Faktor zu den zwei ersten Gliedern der Proportion; hierauf dividire man den zusammengesetzten mit einem seiner Maaße, und mit dem nämlichen Divisor multiplicire man den einfachen Faktor, so giebt dieses Produkt und der vorige Quotient die Glieder des zweiten Verhältnisses; und das Maaß des zusammengesetzten Faktors, durch welches man diese Werthe erhalten hat, muß der Exponent der Proportion seyn; z. B.: es seye das Produkt der äußern Glieder $= 5 \times 6 = 30$; so bleibt dieser Werth ungeändert, wenn man den zusammengesetzten Faktor 6 mit 2 dividirt, und den einfachen 5 mit 2 multiplicirt; denn man erhält:

$$3 \times 10 = 30,$$

Bildet man aus diesen Werthen von 30 eine Gleichung, so ist: $5 \times 6 = 3 \times 10.$

Nun soll das Produkt 3×10 das Produkt der mittlern Glieder seyn; es fragt sich daher nur, um ihre Verbindung mit den äußeren; solches ist aber an dem gleichen Exponenten zu erkennen.

In der Gleichung $5 \times 6 = 3 \times 10$ ist 10 durch 2 mal 5, und 3 aus 6 dividirt durch 2 entstanden; man kann daher

auch sagen: es ist 5 in 10, so wie 3 in 6 zweimal enthalten; folglich:

$$\frac{6}{3} = 2 \text{ und } \frac{10}{5} = 2.$$

Sieht man 2 als den gleichen Exponenten dieser zwei Divisionen an, so sind *solche* Verhältnisse einer geometrischen Proportion wie diese:

$$\underbrace{\overbrace{6 : 3}^{30} = \overbrace{10 : 5}^{30}}_{30.}$$

Oder:

$$\underbrace{\overbrace{10 : 5}^{30} = \overbrace{6 : 3}^{30}}_{30.}$$

§. 139.

Auf gleiche Weise, wie vorhin gezeigt worden, müssen sich die Faktoren zu einander verhalten, die einerlei Produkt und eine geometrische Proportion geben sollen.

Man hat auch gesehen, daß es einerlei ist, welches Paar von Faktoren man entweder zu den äußern oder zu den mittlern Gliedern nimmt; nun soll aber auch dargethan werden, daß man die zu äußern Gliedern, so wie die zu den mittlern Gliedern bestimmten Faktoren beliebig unter sich verwechseln, d. h., daß man jeden des erstern Paars entweder zum vierten oder ersten, und jeden des letztern Paars zum zweiten oder dritten Gliede der Proportion machen kann. Zu gleicher Zeit sollen die noch übrigen Verwechslungen, welche unter den Gliedern ohne Beeinträchtigung der Proportion möglich sind, aufgeführt werden.

Zur Grundlage für die Zulässigkeit nachstehender Veränderungen dient immer die in §. 134 gegebene Darstellung der verschiedenen Werthe der Glieder einer Proportion.

Es diene zur Betrachtung die Proportion:

$$9 : 4 = 18 : 8$$

$$\overbrace{9 \times 8 = 72 = 4 \times 18}^{72}$$

so kann unbeschadet ihres Werths verwechselt werden:

1) das 1te Glied mit dem 2ten und das 3te mit dem 4ten; z. B.

$$4 : 9 = 8 : 18$$

$$\overbrace{4 \times 18 = 72 = 9 \times 8}^{72}.$$

2) Das 1te mit dem 3ten und das 2te mit dem 4ten z. B.:

$$18 : 8 = 9 : 4$$

$$\overbrace{18 \times 4 = 72 = 8 \times 9}^{72}.$$

3) Das 2te mit dem 3ten; z. B.

$$9 : 18 = 4 : 8$$

$$\overbrace{9 \times 8 = 72 = 18 \times 4}^{72}.$$

4) Das 1te mit dem 4ten; z. B.

$$8 : 4 = 18 : 9$$

$$\overbrace{8 \times 9 = 72 = 4 \times 18}^{72}.$$

5) Das 1te mit dem 4ten und das 2te mit dem 3ten; z. B.

$$8 : 18 = 4 : 9$$

$$\overbrace{8 \times 9 = 72 = 18 \times 4}^{72}.$$

Anmerk. Mit der Verwechslung der Glieder verändert sich zwar der Werth des Exponenten in Bezug auf die Ordnung der Glieder,

aber für die Proportion bleibt er immer der nämliche, was man an den gleichen Produkten sehen kann. So lange Letzteres Statt findet, hat sich die Proportion nicht geändert.

Aus den gegebenen Beispielen folgt die allgemeine Regel für die Formirung einer geometrischen Proportion aus zwei Paar Faktoren, deren jedes die nämliche Zahl produzirt:

„Hat man ein Paar dieser Faktoren beliebig zu äußern „Gliedern bestimmt, so nehme man einen davon für's erste „und den andern für's vierte Glied; mit dem andern Paare „Faktoren, welches nun die mittlern Glieder giebt, kann man „ebenfalls beliebig in der Verwendung der einzelnen zum zwei„ten oder dritten Gliede verfahren. Nur wenn in einem Pro„dukte ein unbekannter Faktor unter dem Zeichen x vorkommt, „so bestimme man die Faktoren desselben zu äußern Gliedern, „und namentlich x zum vierten Gliede*); im Uebrigen bleibt „Alles, wie gesagt wurde."

§. 140.

Aufgabe. Aus den zwei Produkten:

$$13 \times 15 = 3 \times 65,$$

eine geometrische Proportion darzustellen.

Aufl. Nimmt man 13×15 als Produkt der äußern Glieder an, so ist 3×65 das Produkt der mittlern. Theilt man die Faktoren unter der angenommenen Bestimmung ein, so kann dieß geschehen:

1) $13 : 3 = 65 : 15$; 2) $13 : 65 = 3 : 15$;
3) $15 : 3 = 65 : 13$; 4) $15 : 65 = 3 : 13$.

Hätte man aber 3×65 als Produkt der äußern und 13×15 als Produkt der mittlern Glieder genommen, so wären folgende Proportionen entstanden:

5) $3 : 13 = 15 : 65$; 6) $3 : 15 = 13 : 65$;
7) $65 : 13 = 15 : 3$; 8) $65 : 15 = 13 : 3$.

---

*) Es ist dieß blos eine Annahme, um eine Uebereinstimmung in der Behandlung eines gegebenen Falles herbeizuführen.

In den Proportionen Nro. 1 und 8, so wie in Nro. 4 und 5 sind nur die Verhältnisse in ihrer Ordnung verwechselt worden. Man wird sich überzeugen, daß die betreffenden Produkte in jeder der 8 Nummern immer einander gleich sind.

§. 141.

Aufgabe. Aus $17 \times 26 = 34 \times x$ die Proportion anzusetzen.

Aufl. Nach der hierüber gegebenen Bemerkung soll dasjenige Produkt, in welchem die Unbekannte x vorkommt, also hier $34 \times x$, als das Produkt der äußern Glieder angesehen werden, und zwar x das vierte Glied der Proportion seyn; demnach schränkt sich die Aufgabe auf folgende Figuren ein:

1) . . . . . $34 : 17 = 26 : x$

$$34\,x = 17 \,.\, 26.$$

Entwickelt man den Werth für x, s. i.

$$34\,x = 442$$

$$x = \frac{442}{34} \text{ und}$$

$$x = 13.$$

2) . . . $34 : 26 = 17 : x$

$$34\,x = 442$$

$$x = \frac{442}{34}$$

$$x = 13.$$

Also auf jede der angezeigten Weisen findet man das nämliche Resultat.

§. 142.

Wird zu zwei gleichen Produkten eine gleiche Größe addirt, so kann man unter gewissen Umständen die beiden Summen auch in eine Proportion auflösen; wenn nämlich diese Größe durch einen Faktor aus jedem Produkt meßbar, oder ein Produkt von solchen ist; z. B. man habe:

$$A \times D = B \times C,$$

woraus die Proportion entstünde:

$$\text{I.}\quad A : B = C : D.$$

Wird nun zu beiden obigen Produkten Gleiches unter besagten Bedingungen addirt, so muß wieder Gleiches werden, man addire z. B. $A \times C$, so hat man:

$$A \times D + A \times C = B \times C + A \times C$$

Es ist aber im 1ten Theile dieser Gleichung der Werth A, und im 2ten Theile der Werth C ein gemeinschaftlicher Faktor, weßhalb man setzen kann:

$$A\,(C + D) = C\,(A + B)$$

wornach man wieder auf jeder Seite zwei Faktoren hat, deren Produkt gleich ist und daher die Proportion geben:

$$\text{II.}\quad A : A + B = C : C + D$$

Will man dieses Beispiel in Zahlen haben, so seyen die anfänglichen Produkte:

$$A \times D = B \times C$$
$$14 \times 20 = 5 \times 56,$$

und ihre Proportion:

$$\text{I.}\quad 14 : 5 = 56 : 20.$$

Es werde nun zu jedem Theile der Produkten-Gleichung, das Produkt aus zwei Faktoren, wovon einer zugleich in dem 1ten und der andere in dem 2ten Theile enthalten ist, addirt: z. E. 14×56, so erhält man:

$$14 \times 20 + 14 \times 56 = 5 \times 56 + 14 \times 56.$$

Nun ist in dem 1ten Theile dieser Gleichung 14 und in dem 2ten 56 ein gemeinschaftlicher Faktor, was dadurch ausgedrückt werden kann:

$$14\,(20 + 56) = 56\,(5 + 14),$$

daher können diese vier Faktoren in eine Proportion aufgelöst werden, wie nachstehende:

$$\text{II.}\quad 14 : (14 + 5) = 56 : (56 + 20.)$$

Die Produkte formirt:

äußere $14 \times (56 + 20) = 14 \times 76 = 1064$ Glieder,
mittlere $56 \times (14 + 5) = 56 \times 19 = 1064$ Glieder.

Vergleicht man die Proportionen von I. und II. miteinander, so erhält man den Satz:

„Es verhält sich das erste Glied zur Summe des ersten „und zweiten, wie sich verhält das dritte Glied zur Summe „des dritten und vierten Glieds.“

§. 143.

Wenn man zu den zwei Produkten:

$A \times D = B \times C$ das Produkt $D \times B$ addirt hätte, so wäre entstanden:

$$A \times D + D \times B = B \times C + D \times B.$$

Im ersten Theile dieser Gleichung ist D, und im zweiten B der gemeinschaftliche Faktor; daher:

$(A + B)\, D = (C + D)\, B$; hieraus die Proportion entworfen:

$$\text{III. } A + B : B = C + D : D$$

Vergleicht man diese III. Proportion wieder mit der I. des vorigen §., so ist der Satz:

„Die Summe des ersten und zweiten Glieds verhält sich „zum zweiten Gliede, wie die Summe des dritten und vierten Glieds zum vierten Gliede.“

§. 144.

Ebenso kann man eine Größe von beiden Produkten abziehen, die so beschaffen ist, daß sie durch Multiplication eines Faktors des ersten Produkts mit einem Faktor des andern erhalten wurde, oder diese Faktoren zu Maaßen hat.

Es seyen abermals die Produkte:

$$A \times D = B \times C$$

gegeben, und von beiden die Größe $A \times C$ abgezogen, so entsteht:

$$A \times D - A \times C = B \times C - A \times C$$

Die gemeinschaftlichen Faktoren ausgeworfen:

$$A\,(D - C) = C\,(B - A);$$

woraus die Proportion abgeleitet wird:

IV. $A : B - A = C : D - C$; dieß heißt, im Vergleich mit der Proportion I. in §. 142:

„Es verhält sich das erste Glied zum zweiten weniger „dem ersten, wie das dritte Glied zum vierten weniger dem „dritten."

Würde man die gleichen Theile umgekehrt abgezogen haben, was natürlich ganz von ihrer Größe gegen einander abhängt, z. B.: von $A \times C$ die gleichen Produkte, so wäre geworden: $A \times C - A \times D = A \times C - B \times C$

$$A (C - D) = C (A - B)$$

und die Proportion:

V. $A : A - B = C : C - D.$

„Es verhält sich das erste Glied zum ersten weniger dem „zweiten, wie das dritte Glied zum dritten weniger dem vier„ten Glied."

Benützt man auch die andere Größe $D \times B$ in vorstehender Eigenschaft, so hat man:

$$A \times D - D \times B = C \times B - D \times B$$

$$(A - B) D = (C - D) B;$$

daraus die Proportion:

VI. $A - B : B = C - D : D.$

„Es verhält sich das erste Glied weniger dem zweiten, „zum zweiten, wie das dritte Glied weniger dem vierten zum „vierten Glied."

Durch Verkehrung der Subtraction erhält man:

$$D \times B - A \times D = D \times B - B \times C$$

$$D (B - A) = B (D - C)$$

giebt die Proportion:

VII. $B : B - A = D : D - C.$

„Das zweite Glied verhält sich zum zweiten weniger „dem ersten, wie das vierte Glied zum vierten weniger dem „dritten Glied."

Mit diesen entwickelten Proportionen könnte man nun wieder die nämlichen Verwechslungen wie in §. 139 vorneh-

men; aber es seye den Anfängern überlassen, solche zu ihrer Uebung auszuführen; wobei sie für die Buchstabenwerthe Zahlen annehmen mögen.

§. 145.

Multiplicirt man zwei Produkte, die einander gleich sind und eine Proportion geben, mit einerlei Größe, so entsteht wieder Gleiches.

Man behalte das Beispiel von $A \times D = B \times C$ bei und nehme an, beide Produkte seyen mit einer Größe n multiplicirt *), so wäre:

$$n \,.\, A \,.\, D = n \,.\, B \,.\, C.$$

Sieht man nA und nB je als einen Faktor des ganzen Produkts an, was geschehen darf, so kann man die Proportion ableiten:

$$nA : nB = C : D,$$

woraus sich folgert:

„Wenn das erste und zweite Glied einer Proportion mit „einerlei Zahl multiplicirt werden, so ändert sich der Werth der „Proportion nicht."

Diese Behauptung kann leicht eingesehen werden, wenn man sich das erste Verhältniß als einen Bruch $\frac{A}{B}$ denkt, dessen Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt wurden; oder auch: um wie viel der Exponent im ersten Gliede vermehrt worden ist, so viel mal hat sich auch der Werth des zweiten Gliedes vermehrt.

Verbindet man den Multiplicator n mit den andern Faktoren der Produkte $A \,.\, D = B \,.\, C$, so erhält man die Proportion

$$A : B = nC : nD \text{ **}).$$

---

*) Die Buchstaben bedeuten allgemeine Werthe und kann für sie einzeln angenommen werden, was will, nur im Zusammenhang müssen sie das geeignete Verhältniß zu einander haben, wie z. B. in den Proportionen.

**) Werden Buchstabengrößen ohne ein Zeichen mit einander zu-

„Multiplicirt man das dritte und vierte Glied einer geo„metrischen Proportion mit einerlei Zahl, so wird der Werth „derselben nicht geändert.“

Aus den vorigen Gründen kann man aber auch setzen:

$$A \times nD = nB \times C,$$

woraus die Proportion entsteht:

$$A : nB = C : nD.$$

„Wird das zweite und dritte Glied einer geometrischen „Proportion mit einerlei Zahl multiplicirt, so stehen ihre „Produkte noch in der gleichen Ordnung in Proportion mit „den übrigen Gliedern.“

Die Trennung und Zusammensetzung der Faktoren hätte auch so geschehen können:

$$An \times D = B \times nC,$$

woraus die Proportion sich ergiebt:

$$nA : B = nC : D$$

„Wenn man das erste und dritte Glied mit einerlei Zahl „multiplicirt, so stehen ihre Produkte mit den übrigen Glie„dern in derselben Ordnung in Proportion.“

Es läßt sich dieser Satz auch daraus abnehmen, daß der Exponent im ersten und dritten Gliede mit einerlei Zahl multiplicirt worden und somit wieder Gleiches entstanden ist.

§. 146.

Wären die Produkte: $n \times A \times D = n \times B \times C$ noch einmal mit n multiplicirt, so würde:

$$nA \times nD = nB \times nC,$$

und hieraus die Proportion:

$$nA : nB = nC : nD.$$

„Da hier alle Glieder gleichviel erhöht oder vermindert „worden sind, je nachdem der Werth von n ist, so hat der „Werth der Proportion keine Aenderung erlitten.“

---

sammengesetzt, so bedeutet dieß die Multiplication der einen in die andere, oder ein Produkt aus ihnen.

Denn dividirt man das erste Glied jeden Verhältnisses durch sein zweites, so erhält man den Exponenten der Proportion und dieser verhält sich:

$$\frac{nA}{nB} : 1 = \frac{nC}{nD} : 1 \text{ oder}$$

$$\frac{A}{B} : 1 = \frac{C}{D} : 1$$

das Nämliche, wie in der Proportion:

$$A : B = C : D$$

Es mögen nun die ersten Produkte, aus welchen die bisherigen Betrachtungen abgeleitet wurden, nach und nach mit unendlich vielen Größen multiplicirt werden, so schränkt sich doch immer ihre Verwandlung in Proportionen auf die vorgestellten Fälle ein.

§. 147.

Werden die gleichen Produkte $A \times D = B \times C$ mit einerlei Größe, z. B. wieder mit n dividirt, so ergeben sich folgende Proportionen:

$$\frac{A \times D}{n} = \frac{B \times C}{n} \text{ d. i. } \frac{A}{n} \times D = \frac{B}{n} \times C$$

giebt:

$$1) \quad \frac{A}{n} : \frac{B}{n} = C : D$$

„Wird das erste und zweite Glied einer geometrischen „Proportion durch einerlei Zahl dividirt, so sind ihre Quotienten in gleichem Verhältnisse wie vorher, oder die Proportion „hat sich nicht geändert.“

Der Exponent ist im ersten Gliede so oft vermindert worden, als das zweite Glied.

Obige Produkte könnten auch gesetzt werden:

$$\frac{A}{n} \times D = \frac{C}{n} \times B \text{ woraus die Proportion}$$

$$2) \quad \frac{A}{n} : B = \frac{C}{n} : D \text{ entstünde, was heißt:}$$

„Dividirt man das erste und dritte Glied durch einerlei

„Zahl, so stehen die Quotienten mit den übrigen Gliedern in „der gleichen Ordnung in Proportion.“

Aus der ersten Gleichung kann auch abgeleitet werden:

$$3)\ A : B = \frac{C}{n} : \frac{D}{n}$$

„Dividirt man das dritte und vierte Glied einer Pro„portion durch die nämliche Zahl, so ändert sich die Propor„tion nicht.“

Ferner erfolgt auch:

$$4)\ A : \frac{B}{n} = C : \frac{D}{n}$$

„Wird das zweite und vierte Glied einer Proportion „durch die gleiche Zahl dividirt, so stehen die erhaltenen Quo„tienten der nämlichen Ordnung nach mit den zwei übrigen „Gliedern in Proportion.“

Endlich ist:

$$5)\ \frac{A}{n} : \frac{B}{n} = \frac{C}{n} : \frac{D}{n}, \text{ was heißt:}$$

„Wenn man alle Glieder der Proportion durch die „gleiche Zahl dividirt, so ändert sich dieselbe nicht.“

Es ist nämlich in diesem Falle der Divisor n blos Gattungsname geworden, was auf das Verhältniß der Werthe keinen Einfluß hat.

Mit jeder der von §. 145 an betrachteten Proportionen lassen sich die nämlichen Verwechslungen wie in §. 139 vornehmen.

§. 148.

Sind zwei Proportionen:

$$1)\ A : B = C : D \text{ und}$$

$$2)\ m : n = p : q$$

gegeben, so stehen die Produkte aus den Gliedern gleicher Ordnung wieder mit einander in Proportion, d. i.:

„Das Produkt aus den ersten Gliedern der beiden Pro„portionen, verhält sich zum Produkt aus den zweiten Glie-

„dern, wie das Produkt aus den dritten Gliedern, zum Pro„dukt aus den vierten Gliedern;“ also

$$Am : Bn = Cp : Dq$$

Beweis: Bildet man aus beiden Proportionen die Produkte der äußern und mittlern Glieder, so ergiebt sich

für Nro. 1) $A . D = B . C$ und

= = 2) $m . q = n . p$

Multiplicirt man nun die beiden Theile der ersten Gleichung mit denen der zweiten, d. h. Gleiches mit Gleichem, so erhält man die gleichen Werthe:

$$A . m . D . q = B . n . C . p,$$

woraus die Glieder einer Proportion auf die angezeigte Weise entnommen werden können. Es ist leicht einzusehen, daß auch bei einer größern Anzahl von Proportionen das Nämliche Statt finden müßte; wären z. B. folgende gegeben:

$$A : B = C : D$$
$$m : n = p : q$$
$$E : F = G : H$$
$$r : s = t : u \text{ u. s. f.,}$$ so entstünde

$$A . m . E . r : B . n . F . s = C . p . G . t : D . q . H . u$$

§. 149.

Wären die zwei Proportionen:

1) $A : B = \alpha : \beta$ und

2) $B : C = \gamma : \delta$

gegeben, so entsteht durch ihre Multiplication

$$AB : BC = \alpha\gamma : \beta\delta.$$

Dividirt man nun die beiden ersten Glieder dieser Proportion durch ihren gemeinschaftlichen Faktor B, wodurch sie nicht geändert wird, §. 147, Nro. 1, so hat man:

$$A : C = \alpha . \gamma : \beta . \delta;$$ d. h.

„Wenn im ersten Verhältnisse einer Proportion das „zweite Glied gleich ist dem ersten Gliede des ersten Verhält„nisses einer andern Proportion, so verhält sich: das erste

„Glied der ersten Proportion zum zweiten Gliede der zweiten, „wie das Produkt der dritten Glieder beider Proportionen zum „Produkt ihrer vierten Glieder.“

Vergleicht man mehrere Proportionen dieser Art mit einander, z. B.:

$$A : B = \alpha : \beta$$
$$B : C = \gamma : \delta$$
$$C : D = \varepsilon : \zeta$$
$$D : E = \eta : \vartheta$$
$$E : F = \iota : \varkappa \text{ u. s. w. u. s. w.}$$

so kann man nach und nach erhalten:

$$A : D = \alpha . \gamma . \varepsilon : \beta . \delta . \zeta$$
$$A : E = \alpha . \gamma . \varepsilon . \eta : \beta . \delta . \zeta . \vartheta$$
$$A : F = \alpha . \gamma . \varepsilon . \eta . \iota : \beta . \delta . \zeta . \vartheta . \varkappa$$

oder auch:

$$B : D = \gamma . \varepsilon : \delta . \zeta$$
$$B : F = \gamma . \varepsilon . \eta . \iota : \delta . \zeta . \vartheta . \varkappa$$

oder:

$$C : E = \varepsilon . \eta : \zeta . \vartheta \text{ u. s. w. u. s. w.}$$

Man zeigt diese Verhältnisse gewöhnlich auf folgende Weise an:

$$A : F = \left\{ \begin{array}{c} \alpha : \beta \\ \gamma : \delta \\ \varepsilon : \zeta \\ \eta : \vartheta \\ \iota : \varkappa \end{array} \right\}$$

§. 150.

Wir wollen nun die Eigenschaften solcher fortlaufender oder stetiger Proportionen betrachten, bei welchen immer das zweite Verhältniß der vorhergehenden das erste Verhältniß der folgenden ist, wie z. B. in Nachstehendem:

1) $A : B = B : C$, 2) $B : C = C : D$,

3) $C : D = D : E$, 4) $D : E = E : F$ u. s. f.,

solche werden auf diese Art dargestellt:

4) $A : B = B : C = C : D = D : E = E : F$. u. s. f.

Will man nun in der Proportion Nro. 1 wissen, welchen Werth das Verhältniß A : C, d. h. das erste Glied zum letzten, in Beziehung auf das Verhältniß A : B hat, so betrachte man Folgendes:

Es ist $A \cdot C = B \cdot B$, dividirt man beiderseits mit $C \cdot C$, s. i. $\frac{A \cdot C}{C \cdot C} = \frac{B \cdot B}{C \cdot C}$; im ersten Theile mit C multiplicirt und dividirt, läßt:

$$\frac{A}{C} = \frac{B \cdot B}{C \cdot C}$$

und hieraus die Proportion formirt, erhält man:

$A : C = B \cdot B : C \cdot C$, oder

$A : C = 2\,(B : C)$; da aber B : C gleich ist A : B, so setze man dieses für jenes, woraus sich ergiebt:

$A : C = 2(A : B)$

Hier soll 2(A : B) anzeigen, daß das Verhältniß A : B zweifach potenzirt ist, oder mit sich selbst multiplicirt werden müsse. Es ist demnach das Verhältniß A : C das zweifach erhöhte Verhältniß von A : B.

Auf gleiche Art wäre aus Nro. 4.

$A : D = 3(A : B)$

$A : E = 4(A : B)$

$A : F = 5(A : B)$.

Diese Ableitungen kann sich Jeder auf die vorhin angegebene Weise selbst machen.

§. 151.

Nach dem bisher Vorgetragenen wird es wohl überflüssig seyn, auch Beispiele über solche Fälle auszuführen, wenn eine Proportion durch eine andere dividirt werden solle; da immer die gleichen Grundsätze hiefür angewendet werden müssen. Nur seye noch bemerkt, daß man alle die dargestellten Veränderungen einer Grundproportion mittelst zweier gleicher Produkte, eben so leicht, ja öfters noch leichter, aus der Gleichung ihrer

Werthe unter der Bruchgestalt hätte ableiten können; denn ein geometrisches Verhältniß ist nichts anderes als ein Bruch, also: $A : B = C : D$ ist gleich: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Würde nun letztere Gleichung mit der Größe n multiplicirt, so erhielte man:

$\frac{An}{B} = \frac{Cn}{D}$, woraus, wenn man wieder den gewöhnlichen Ansatz entwickelt:

$$An : B = Cn : D,$$

wie vorher entsteht.

Wir haben nur deßwegen die Form der Produkten-Gleichung durchgängig beibehalten, weil dieselbe in den meisten Lehrbüchern der Arithmetik angewendet wird, und sonach hier Gelegenheit genommen, die oft sehr mangelhaften Erklärungen über die Eigenschaften der Proportionen und ihre Verwandlungen vollständig zu ergänzen.

---

§. 152.

Von den Dezimalbrüchen.

Das Wesen des bisher erklärten Dezimalsystems der Zahlen, besteht darin, daß von der ersten Zifferstelle an, welche die Einheiten enthält, jede nächst folgende Stelle gegen die Linke, die Ziffern um das Zehnfache ihres Werthes, welchen sie in der vorhergehenden gehabt hätten, vermehrt; so daß also auch gesagt werden kann, jede Ziffer, welche um eine Stelle von der Linken gegen die Rechte rückt, wird um das Zehnfache ihres vorigen Werthes vermindert. Wie nun bei Erzeugung der ganzen Zahlen die Vermehrung durch das Dezimalsystem in's Unendliche erweitert werden kann, ebenso läßt sich auch die Verminderung ins Unendliche durch dasselbe System fortsetzen, nur auf die entgegengesetzte Seite. — Erweitert man nun die Zifferstellen zur Rechten über die Einheiten

hinaus, so wird die nächste Stelle zehnfach kleinere Werthe als die Stelle der Einheiten anzeigen, und in ihr jede Ziffer dem Werthe nach kleiner als 1 seyn, weil ja 10 Theile dazu gehören würden, um 1 in der vorangehenden Ordnung auszumachen. Man kann sich hiebei die Einheit in zehn Theile getheilt und die Ziffer in der ersten Stelle nach den Einheiten als die Anzahl solcher Theile *) denken, d. h. diese Ziffer zeigt den Zähler eines Bruchs an, dessen Nenner jederzeit 10 ist. Da dieser Nenner durch die Ordnung der Ziffer bekannt ist, so darf er nicht gesetzt, sondern nur der Anfang der Einheitstheile bezeichnet werden, welches man durch ein Komma (,) nach den Einheiten andeutet; so wäre z. B. 6,9. „Sechs Ein„heiten oder Ganze und Neun zehnfach verkleinerte Einheiten „oder Neun Zehntheile der Einheit," was man kurz ausspricht:

„Sechs Ganze und Neun Zehntel!"

Vorstehender Ausdruck ist dem gewöhnlichen Bruche $6\frac{9}{10}$ gleich.

Betrachtet man nun die Ziffern in der zweiten Stelle nach den Einheiten, so sind diese wiederum zehnfach gegen die Werthe der vorigen Stelle, oder hundertfach gegen die Einheiten verkleinert, z. B. in dem Ausdrucke 6,95 ist die Ziffer 5 der 5 mal zehnte Theil von einem Zehntel oder der 5 mal hunderte Theil von der Einheit, oder Einem Ganzen; was man durch „Fünf Hundertel" ausdruckt. — Der Werth 6,95 ist dem gewöhnlichen Bruche $6\frac{95}{100}$ gleich.

Die dritte Stelle wird nun die Tausendtheile

„ vierte „ „ „ „ Zehntausendtheile der Einheit u. s. f. enthalten; kurzum jede Stelle in der nämlichen Ordnung, die zehnfachen Verkleinerungen der Einheit anzeigen, wie sie bei ganzen Zahlen die zehnfachen Vermehrungen derselben bezeichnet haben, nur in umgekehrter Richtung von der Einheitsstelle aus **).

*) Als Bruchtheile.

**) Bei den ganzen Zahlen drückt jede Ziffer einer Ordnung das

§. 153.

Aus dem Bisherigen wird man ersehen haben, daß die Einheit durch die erste Zifferstelle nach dem Komma in 10, durch die zweite in 10 mal 10 oder 100, durch die dritte in 10 mal 10 mal 10 oder 1000 u. s. w., d. h. im Allgemeinen durch jede Stelle in so oft mal 10 Theile getheilt wird, als die Nummer ihrer Ordnung nach der Einheit selbst ist; ferner, daß die letzte Ziffer einer Zahl nach dem Komma diese Theilung bedingt und die Zahl selbst die Menge solcher Theile angiebt, also Zähler und Nenner in dieser Zahl enthalten sind. In dieser Beziehung nennt man eine solche Zahl einen Dezimalbruch.

Ist z. B. der Ausdruck gegeben:

$10{,}_{69538}$, so wird er gelesen:

„Zehn Ganze, Sechs Zehntel, Neun Hundertel, Fünf „Tausendel, Drei Zehntausendel, Acht Hunderttausendel.“

Oder was einerlei ist.

„Zehn Ganze und Neun und Sechzigtausend, Fünfhun„dert Acht und Dreißig — Hunderttausendel“ (nämlich der Einheit).

$$10{,}_{69538} = 10\frac{69538}{100000}.$$

Es wird $0{,}_{69538}$ ein eigentlicher, und

$10{,}_{69538}$ ein gemischter Dezimalbruch genannt, was jedoch in der Anwendung von keiner Bedeutung wegen des fortlaufenden gleichen Systems ist; daher man auch derlei Brüche, denen ganze Zahlen vorhergehen, schlechtweg Dezimalbrüche nennt.

§. 154.

Die Zahl eines Dezimalbruches wird ebenso behandelt,

---

bestimmte Vielfache der Einheit aus; aber mit den Ziffern hinter der Einheit will man sowohl durch ihre Ordnungen eine fortgesetzte Zehntheilung, als auch die Menge solcher Theile anzeigen.

wie die ganzen Zahlen; wenn nämlich zwischen andern eine oder mehrere Gattungen Theile der Einheit fehlen, so werden in ihre zugehörigen Stellen Nullen gesetzt. Bei jedem Dezimalbruch ist die Bezeichnung der Stelle der Einheiten sehr nothwendig, weil von ihr der Werth der folgenden Ziffern abhängt, oder dieselbe die Ordnung der übrigen Zifferstellen bestimmt. Wäre nun keine ganze Einheit vorhanden, so setzt man an ihre Stelle eine 0 und nach diesem das Komma. Hat man auch keine Werthe für die erste, zweite, dritte u. s. w Stelle, so werden solche mit Nullen ausgefüllt.

Soll man z. B. schreiben: 4 Hundertel, 6 Zehntausendel, so geschieht dieß durch: $0{,}0406$, welches auch heißt: 406 Zehntausendel; denn es ist: $\frac{0{,}0406}{10000} = \frac{406}{10000}$, weil in letzterer Form die Nullen vor dem Zähler keinen Werth haben. — Es wäre ebenso unnöthig, bei den Dezimalbrüchen vor die Einheitsstelle zur Linken Nullen zu setzen, als wenn man der letzten Ziffer eines Dezimalbruches Nullen anfügen wollte; denn im ersten Falle ist an und für sich klar, daß sie Nichts bedeuten können, und im zweiten würden sie die Theilung der Einheit um ebenso viel vermehren, als die Anzahl der Theile selbst vergrößert worden ist, was so viel heißt, als Zähler und Nenner eines Bruches sind mit einerlei Zahl multiplicirt, daher der Bruch nicht verändert worden.

§. 155.

Die Ziffern eines Dezimalbruches nach dem Ganzen oder nach dem Komma, heißt man Dezimaltheile oder Dezimalziffern und derselbe hat eine Zahl zum Nenner, die aus 1 mit so vielen angehängten Nullen besteht, als die Anzahl dieser Ziffern beträgt. Es ist z. B.

$$3469{,}78905371 = 3469 + 0{,}78905371 =$$

$$= 3469 + \frac{78905371}{100000000} \text{ oder auch } = \frac{3469{,}78905371}{100000000.}$$

Zur Uebung in der leichtern Uebersicht der verschiedenen

Werthe der Dezimalziffern, so wie ihrer Benennungen, können sich Anfänger ein Täfel'chen, welches dem für ganze Zahlen in der Einleitung gegebenen (§. 16) ähnlich ist, entwerfen.

Den großen Vortheil der Dezimalbrüche bei Berechnungen, wird man außer dem Umstande, daß ihre Ziffern wie bei ganzen Zahlen, mit solchen zusammenhängen, auch darin erblicken, daß sie sehr leicht mittelst Nullen auf gleiche Benennung gebracht werden können.

Wir wollen nun zu den verschiedenen Rechnungsarten mit Dezimalbrüchen übergehen.

---

§. 156.

Vermehrende Rechnungsart mit Dezimalbrüchen.

a) Durch Addition.

Hier ist weiter Nichts zu beobachten, als daß man die Ziffern der gleichen Ordnungen aller summirenden Glieder untereinander setzt; also Ganze unter Ganze, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel*) u. s. w., und wie bei der Addition der ganzen Zahlen die Summirung mit der niedersten Ordnung rechter Hand anfängt, und sie gegen die Linke so fortsetzt, daß man immer zehn Theile der zusammengezählten Ordnung als einen Einer zu der nächstfolgenden Ordnung zählt, und nur den Rest über den letzten ganzen Zehner in der gleichen Ordnung behält; z. B.

1) $15{,}3789031 + 3{,}0462 + 0{,}060134$ wird behandelt:

$$\begin{array}{r} 15{,}3789031 \\ 3{,}0462 \\ 0{,}060134 \\ \hline \text{Summe} = 18{,}4852371. \end{array}$$

2) $0{,}9873056 + 2{,}80531 + 68{,}001$ wird ergeben:

---

*) Die Benennung geht jederzeit von der Ordnung der ganzen Einheit aus.

$0{,}9873056$
$2{,}80531$
$68{,}001$
Summe $= 71{,}7936156$.

Man thut wegen Vermeidung von Irrungen gut daran, dasjenige summirende Glied, welches die meisten Dezimalziffern enthält, oben an zu setzen, und bei den andern Gliedern die Anzahl dieser Ziffern durch Punkte oder Nullen zu den obigen zu ergänzen. Man nennt dieses Verfahren: die gleiche Benennung herstellen; z. B.

$0{,}037 + 6{,}8410369 + 186{,}0055$ würde angesetzt; entweder:

$6{,}8410369$	oder	$6{,}8410369$
$186{,}0055\ldots$		$186{,}0055000$
$0{,}037\ldots$		$0{,}0370000$
$192{,}8835369$	Summe	$192{,}8835369$

§. 157.

b) Durch Multiplication.

Soll z. B. $0{,}6$ oder 6 Zehntel mit der Zahl 7 multiplicirt werden, so erhält man 42 Zehntel oder $4{,}2$. „Vier Ganze und zwei Zehntel;“ wäre aber verlangt worden: $0{,}6$ mit $0{,}7$ zu multipliciren, so müßte nun ein 10fach kleineres Produkt als vorher sich ergeben, weil der Multiplicator 7 zehnmal kleiner geworden ist. Das vorige Produkt $4{,}2$ wird aber um das Zehnfache vermindert, wenn man das Komma um eine Stelle vorsetzt, oder was das Nämliche ist, die Ziffern des Produkts um eine Stelle rechts rückt; wodurch man erhält: $0{,}42$.

Es soll $0{,}685$ mit der Zahl 35 multiplicirt werden. Man erhält

$0{,}685$
35
3425
2055
Produkt $= 23{,}975$; denn es ist:

0,6	× 35 =	210	Zehntel	oder	=	21,00
0,08	× 35 =	280	Hundertel	"	=	2,80
0,005	× 35 =	175	Tausendel	"	=	0,175
				zusammen	=	23,975

Hätte die Aufgabe gelautet: 0,685 mit 3,5 zu multipliciren, so wäre das vorige Produkt zehnfach kleiner oder = 2,3975 geworden.

Für das Produkt der Faktoren 0,685 und 0,35 aber würde das letztere wiederum 10fach, und das erste 100fach verkleinert, oder = 0,23975 werden müssen.

§. 158.

Man sieht aus diesen Beispielen, daß *wenn ein Dezimalbruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt* wird, das Produkt eine Anzahl Theile der Einheit, von der Gattung der letzten Ziffer des Dezimalbruchs ist; daher muß dieses Produkt auch wieder die gleiche Zahl von Dezimalziffern, welche der Bruch hat, enthalten. Die Regel für diese Multiplication ist also:

„Man multiplicire den Dezimalbruch mit der ganzen „Zahl wie gewöhnlich, und schneide durch das Komma von „dem erhaltenen Produkte so viel Dezimalstellen ab, als der „Bruch selbst enthält, so ist der Werth der Multiplication „auf seine Benennung gebracht."

Ferner hat man gesehen, daß wenn die Ziffern des Multiplicators oder der ganzen Zahl, in Dezimalziffern übergehen, so werden die Dezimalziffern des Produkts um die Anzahl der erstern vermehrt; woraus die Regel folgt:

„Bei der Multiplication zweier Dezimalbrüche verfahre „man wie bei ganzen Zahlen und schneide durch das Komma „von dem erhaltenen Produkt, indem man von der letzten Ziffer „gegen die Linke zählt, so viele Dezimalstellen ab, als die „Anzahl der Dezimalziffern in beiden Brüchen zusammen beträgt."

Diese Regel läßt sich auch auf den vorigen Fall, wenn ein Dezimalbruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, anwenden; weil ja die ganze Zahl keine Dezimalziffer hat; daher heißt sie die allgemeine Regel für die Multiplication der Dezimalbrüche und ist ihr durchaus Nichts weiter beizufügen, als die Anempfehlung der größten Aufmerksamkeit beim Abzählen und Abschneiden der Dezimalziffern; da jeder Mißgriff hierin den wesentlichsten Einfluß auf den zu erzielenden Werth hat *).

§. 159.

Beispiele für die Multiplication der Dezimalbrüche.

1) $17{,}_{500143} \times 1{,}_{086} = 19{,}_{005155298}$;

2) $8{,}_{990034} \times 0{,}_{0378} = 0{,}_{3398232852}$;

3) $0{,}_{004981} \times 0{,}_{0597} = 0{,}_{0002973657}$.

Nach diesen gegebenen Beispielen kann man nun alle möglichen Fälle der Multiplication behandeln.

In der Anwendung kommt es häufig vor, daß man bei einem Produkte aus zwei Dezimalbrüchen nur so viel Stellen zu berücksichtigen im Stande ist, als der Faktor mit der größern Anzahl Ziffern deren enthält. Um nun in solchen Fällen den unnöthigen Zeitaufwand abzuschneiden, welcher zu vollständiger Ausführung einer Multiplication nöthig wäre, und doch den beabsichtigten Zweck zu erreichen, bedient man sich folgender abgekürzter Verfahrungsart: Es sollen z. B. $5{,}_{5689}$ und

*) Soll ein Dezimalbruch mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt werden, so heißt dieß soviel, als jede seiner Ziffern um ihr 10, 100, 1000 u. s. w. Faches zu erhöhen; dieses geschieht aber dadurch, daß man die Zehntel zu Ganzen, zu Zehner, zu Hunderter ꝛc. macht, was einfach sich bewerkstelligen läßt, wenn man das Komma um so viele Stellen links rückt, als der Multiplicator Zehner andeutet, d. h. als er Nullen hat.

$16{,}_{53}$ mit einander multiplicirt werden. Der erste Faktor enthalte die klein möglichsten Theile, welche die menschlichen Sinnen an dem Gegenstande, den er mißt, wahrzunehmen im Stande sind, daher auch in dem Produkte keine kleinern verlangt werden; es schränkt sich also die Aufgabe darauf ein, das Produkt mit vier Dezimalziffern darzustellen, ohne nöthig zu haben, vorher dasselbe vollständig mit sechs Stellen *) zu suchen. Man setze und verfahre, wie folgt:

$3{,}_{5689}$
$16{,}_{53}$

35,689.
21,4134
1,7844
1071

Produkt $= 58{,}_{9939}$. Die Erklärung hierüber ist: Man beginne die Multiplication mit 1 des Multiplicators; weil nun solches ein Zehner ist, so muß auch das Produkt mit ihm, um das Zehnfache erhöht, d. h. jede Ziffer um eine Stelle vorwärts gerückt werden; daher die 9 unter 8 des Multiplicands u. s. f. zu stehen kommt. Hierauf wird mit 6, welches eine Einheitszahl ist, multiplicirt, wodurch die nämliche Gattung der Theile entsteht, welche die letzte Ziffer des Multiplicands anzeigt; demnach setzt man die erste Ziffer der Multiplication mit 6, d. i. 4 unter die letzte Ziffer 9 des Multiplicands. Mit dem nun folgenden Multiplicator 5, welches Zehntel der Einheit sind, verhält es sich nun folgendermaaßen: durch denselben wird jedes Produkt zehnfach verkleinert, oder die Ziffern von diesem um eine Stelle rechts gerückt; daher wenn man multiplicirt: 5×9 macht 45, die 5 in die fünfte Stelle käme, welche man aber nicht ausfüllen will, deßhalb behält man nur die 4 bei, welche in die 4te Dezimalstelle

*) Was man schon zum voraus aus der Summe der Dezimalziffern in beiden Faktoren wissen kann.

gehört und fährt fort: 5×8 ist 40 und 4 behalten giebt 44, wovon nun 4 unter 9 des Multiplicands gesetzt wird. Nun beende man die Multiplication der übrigen Ziffern durch 5, wie sonst, und verfahre mit den Produkten der weitern Dezimalen des Multiplicators in Beziehung auf die Werthe ihrer Ziffern in dem angezeigten Sinne.

---

§. 160.

Von der vermindernden Rechnungsart mit Dezimalbrüchen.

a) Durch Subtraction.

Solche wird, wie die mit ganzen Zahlen vollzogen; nur muß der Minuend, wenn er weniger Dezimalziffern als der Subtrahend hat, vorher durch Nullen mit letzterem auf gleiche Benennung gebracht, so wie in dem erhaltenen Rest die Einheitszahl wieder durch ein Komma von den Dezimalen abgeschnitten werden.

z. B. $3{,}_{5894} - 2{,}_{7014538}$ giebt

$3{,}_{5894000}$ Minuend

$2{,}_{7014538}$ Subtrahend

Rest $= 0{,}_{8879462}$.

Ebenso, wie bei ganzen Zahlen, läßt sich auch hier die Rechnungsart mit der decadischen Ergänzung in denjenigen Fällen mit Vortheil anwenden, wenn mehrere einzelne Dezimalbrüche gegeben sind, die sämtlich von einer Summe abgezogen werden sollen. Es seye z. B.

$25{,}_{6903045} - 7{,}_{3196} - 5{,}_{48801} - 4{,}_{06}$,

so müßte man nach dem gewöhnlichen Verfahren entweder den ersten Differenzbruch von der gegebenen Summe, den zweiten von dem gebliebenen Reste, den dritten von dem letzten Reste u. s. f. abziehen, oder aber vorerst die Summe sämtlicher Differenzbrüche und hierauf ihren Unterschied mit der gegebenen

Summe suchen, was jedenfalls umständlicher, als die Rechnung mit den decadischen Complementen ist, wie sie hier folgt:

$$\begin{array}{lll} & 25{,}6903045 & \\ & 92{,}6804\ldots & -\ 10 \\ & 94{,}51199\ldots & -\ 10 \\ & 95{,}94\ldots\ldots & -\ 10 \\ \hline \text{Rest} = & 8{,}8226945. & \end{array}$$

§. 161.

Beispiele für die Subtraction der Dezimalbrüche.

1) $3689{,}406893 + 407{,}81135002 - 2618{,}51978 - 397{,}44673 - 102{,}589$;
Rest $= 978{,}66273302$.

2) $3{,}000482 - 0{,}10238 - 1{,}57002 - 0{,}43$;
Rest $= 0{,}898082$.

3) $153{,}0486134 - 89{,}5712236 + 14{,}7796$;
Rest $= 78{,}2569898$.

b) Durch Division.

Vor Allem bringe man denjenigen Theil der Division, welcher weniger Dezimalstellen als der andere hat, mit solchem auf gleiche Benennung, d. h., man füge ihm so viele Nullen an, daß mit diesen die Anzahl der Dezimalziffern in beiden Theilen gleich ist, und dividire hierauf wie mit gewöhnlichen Zahlen, bis ein Rest kommt, der kleiner als der Divisor ist. Die erhaltene Quotientenzahl zeigt nun an, wie oft der Divisor in dem Dividend ganz enthalten ist. Will man auch wissen, wie viel Zehntelmal der Rest den Divisor enthält, so muß ersterer vorher selbst zu Zehntel gemacht, d. i. mit 10 multiplicirt werden, welches ganz einfach durch Anhängung einer 0 an denselben geschieht. Geht die Division noch nicht auf, so kann man den letzten Rest, welcher Zehntel bedeutet, zu Hundertel durch Multiplication mit 10, d. h. durch Anhängung

einer 0 machen und wiederum mit dem Divisor den Quotienten suchen, welcher nun anzeigt, wie viel hundertel mal derselbe in dem letzten Dividend enthalten sey. Auf diese angegebene Weise kann mit der Division fortgefahren werden, so lange man will, wenn nicht endlich eine Zahl erscheint, in welcher der Divisor genau aufgeht; für welchen Fall natürlich der Quotient genau gefunden wäre.

Die Zahl des Quotienten, welche anzeigt, wie vielmal der Divisor in dem Dividend ganz enthalten ist, wird, wie bei den übrigen Dezimalbrüchen, mit einem Komma abgeschnitten und die Quotientenziffern aus den Zehnteln, Hunderteln u. s. f. an sie in der gewöhnlichen Ordnung angehängt.

Es soll 13,4086 durch 9 dividirt werden. Der Dividend hat 4 Dezimalstellen, weßhalb man dem Divisor 9, welcher eine ganze Zahl ist, auch so viele anhängt und hierauf wirklich dividirt:

```
9,0000|13,4086|1
      | 9 0000|
      ---------
        4 4086
```

In diesem Beispiele ist der Divisor im Dividend nur Einmal ganz enthalten, daher 1 die ganze Zahl des Quotienten. Nun mache man den Rest durch Anhängung einer 0 zu Zehntel, so wird sein Quotient auch Zehntel geben, u. s. f. u. s. f.

```
90000|134086|1,489844 .........
     | 90000|
     -------
      440860
      360000
      ------
       = 808600
        720000
        ------
        = 886000
         810000
         ------
         = 760000
          720000
          ------
          = 400000
           360000
           ------
           = 400000
            360000
            ------
             40000
```

Es würde nun bei weiterer Fortsetzung der Division immer die Zahl 4 der Quotient werden und dieselbe nie aufgehen, da leicht einzusehen ist, daß nun immer der gleiche Rest 40000 bleiben muß.

Den aus vorstehender Division erhaltenen Quotienten $1{,}48984444\ldots\ldots$ welcher sich mit der gleichen Ziffer ins Unendliche erstreckt, nennt man einen kontinuirlichen oder fortlaufenden Dezimalbruch.

§. 163.

Beispiele für die Division der Dezimalbrüche.

Dividend: Divisor: Quotient:

1) $68{,}405967 : 21{,}58 = 3{,}169878$;

denn es ist:

21580000	68405967	3,169878 *)
	64740000	
	3665967.0	
	2158000 0	
	15079670.0	
	12948000 0	
	215167000	
	194220000	
	189470000	
	172640000	
	168300000	
	151060000	
	17240000	

2) $4{,}589735 : 48{,}673 = 0{,}0943$, was erhalten wird durch:

*) Will man die Division mit einer gewissen Anzahl Ziffern aufhören lassen, so vermehrt man die letzte um 1, wenn die nächste größer als 5, oder als die Hälfte einer Einheit derselben werden würde.

48673000 | 458973500 | 0,0943
438057000
=209165000
194692000
144730000

3) $25{,}681243 : 0{,}0789 = 325{,}49104.$

Aus: 78900 | 25681243 | 325,49104.....
236700..
201124
157800
433243
394500
387430
315600
718300
710100
82000
78900
3100

u. s. w. u. s. w.

§. 164.

Man solle einen gewöhnlichen Bruch, z. B. $\frac{5}{8}$ in einen Dezimalbruch verwandeln. Das Verfahren hiezu gründet sich auf folgende Betrachtung: der Werth des Bruches $\frac{5}{8}$ ist kleiner als 1 und gleich dem 8ten Theile der Einheit 5 mal genommen; denkt man sich nun die Einheit auch in 10 Theile, jeden dieser Theile abermals 10fach u. s. f. bis ins Unendliche getheilt, so müssen zuletzt Theilpunkte der Zehntheilung, mit denen der Achttheilung zusammenfallen, oder doch so nahe beisammen liegen, daß man die einen für die andern nehmen kann. Drückt man hierauf den Werth, welchen 5 der Achtel einnehmen, in den 10tel, 100tel, 1000tel u. s. w. aus, so ist $\frac{5}{8}$ durch einen Dezimalbruch beschrieben, oder in einen solchen verwandelt worden. Der Kalkul hierüber ist leicht zu führen; denn

zum Voraus ist bekannt, daß der Werth eines eigentlichen Bruches, d. h. bei welchem der Zähler kleiner als der Nenner ist, Null Ganze enthält; ferner, daß der Nenner des Dezimalbruches, wenn man Zehntel will 10, für Hundertel 100 u. s. f. ist. Setzt man daher den unbekannten Zähler des Dezimalbruches $= x$ und nimmt an, es solle die Anzahl 10tel gesucht werden, welche auf $\frac{5}{8}$ gehen, so geben die gleichen Werthe die Gleichung:

$$\frac{5}{8} = \frac{x}{10} \text{ oder } \frac{8}{5} = \frac{10}{x}$$

woraus die Proportion abgeleitet wird:

$$8 : 5 = 10 : x$$

d. i. 8 oder die Einheit steht zu 5 Achtel in eben dem Verhältnisse, wie 10 die Einheit zu der Anzahl der 10tel, welche $\frac{5}{8}$ gleich seyn sollen. — Aus der Proportion erhält man:

$$8x = 50$$

$$x = \frac{50}{8} \text{ Zehntel.}$$

Wollte man keine kleineren Theile als 10tel haben, so würde der Näherungswerth für $x = 0{,}6$ seyn. Soll aber der Werth von x wenigstens bis zu 1000tel angegeben werden, so ist die Gleichung:

$$\frac{5}{8} = \frac{x}{1000} \text{ oder } \frac{8}{5} = \frac{1000}{x}$$

und die Proportion hieraus:

$$8 : 5 = 1000 : x$$

$$8x = 5000$$

$$x = \frac{5000}{8} = 625 \text{ Tausendel}$$

oder $x = 0{,}625$ genau, da die Division keinen Rest gelassen hat.

§. 165.

Auf eine einfachere Art, als die angezeigte, läßt sich der Werth eines Bruches in Dezimaltheilen finden, wenn man

den Bruch als eine Division zweier Zahlen, wovon der Nenner der Divisor und der Zähler der Dividend ist, betrachtet, und dieselbe nach den Regeln der Division der Dezimalbrüche verrichtet. Im angenommenen Beispiele $\frac{5}{8}$ findet bei Ausführung der Division mit 8 in 5 Statt:

8 ist in 5 nicht Einmal, sondern 0 mal ganz enthalten; durch Anhängung einer 0 an 5 wird letztere Zahl in 50 Zehntel verwandelt, in denen 8 enthalten ist: 6 mal; dessen Produkt mit dem Divisor 48 läßt 2 Zehntel zum Rest; in diese 2 Zehntel oder 20 Hundertel geht 8 zwei Hundertel mal und bleibt ein Rest von 4 Hundertel oder 40 Tausendel, worin 8 der Divisor 5 Tausendel mal aufgeht, und somit der genaue Werth von $\frac{5}{8}$ in Dezimaltheilen gefunden ist. Die Figur der Division ist folgende:

8 | 5 | 0,

8 | 50 | 0,625
48

= 2.0
16

= 4.0
40

0

§. 166.

Aufgabe. Den Bruch $\frac{1}{3}$ in einen Dezimalbruch zu verwandeln.

Aufl. 3 | 1 | 0,

3 | 10 | 0,33.....
9

10
9

1

Es würde nun 3 ohne Ende in dem Quotienten fortlaufen, weil immer der gleiche Rest 1 bleibt. Einen solchen Dezi-

malbruch wie $0,333\ldots$ nennt man einen periodischen, mit einer Ziffer und diese Ziffer 3 die Periode.

Soll $\frac{3}{7}$ in einen Dezimalbruch verwandelt werden, s. i.

$$
\begin{array}{r|l|l}
7 & 3 & 0, \\
7 & 30 & 0,4285714\ldots \\
 & 28 & \\
\hline
 & 20 & \\
 & 14 & \\
\hline
 & 60 & \\
 & 56 & \\
\hline
 & 40 & \\
 & 35 & \\
\hline
 & 50 & \\
 & 49 & \\
\hline
 & 10 & \\
 & 7 & \\
\hline
 & 30 &
\end{array}
$$

Man sieht, daß der letzte Rest 30 gleich ist dem anfänglichen Dividend, woraus der Quotient 4 erhalten wurde, und daß nun wieder die gleichen Reste, daher auch die gleichen Quotientenzahlen 428571 folgen müssen, bis man abermals zu einem Rest 30 gelangt. Es ist daher sehr leicht, den Dezimalbruch fortzusetzen, ohne wirklich zu dividiren, da man nur die erhaltenen 6 ersten Ziffern immer wiederholen darf. Den Zusammenhang solcher sich wiederholender Ziffern nennt man eine Periode, und den Bruch selbst, in welchem solche Statt findet, einen periodischen Dezimalbruch. Im gegebenen Beispiele ist 428571 die 6ziffrige Periode des periodischen Dezimalbruches $0,428571428571\ldots\ldots$

§. 167.

Aufg. Einen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Aufl. Man setze unter den gegebenen Zähler des Dezimalbruches den bekannten Nenner, indem man beide als

ganze Zahlen betrachtet; z. B. aus $0{,}_{05689}$ entsteht der gewöhnliche Bruch: $\frac{5689}{100000}$. Wollte man solchen in kleinern Zahlen haben, so versuche man, ob sich Zähler und Nenner nicht durch einerlei Zahl dividiren lassen, d. h., ob sie kein größtes gemeinschaftliches Maaß haben; ist solches nicht der Fall, so können die Näherungswerthe mittelst der Kettenbrüche nach §. 88 gefunden werden, wie z. B. im angenommenen Beispiele auf folgende Art:

		17	1	1	2	1	2
100000	: 5689	: 3287	: 2402	: 885	: 632	: 253	u. s. w.
5689	3287	2402	1770	632	506		
43110	2402	885	632	253	126		
39823							
3287							

	17	1	1	2	1	2
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{5}{88}$	$\frac{7}{123}$	$\frac{19}{334}$

Man kann nun für $0{,}_{05689}$ oder $\frac{5689}{100000}$ die Werthe $\frac{1}{17}$ oder $\frac{1}{18}$ oder $\frac{2}{35}$ oder $\frac{5}{88}$ oder $\frac{7}{123}$ oder $\frac{19}{334}$ nehmen, je nach dem Grade der Genauigkeit, der verlangt wird. Je weiter man die Brüche fortgesetzt hätte, desto mehr würden sie sich dem wahren Werthe des ursprünglichen Bruches nähern und am Ende ganz mit ihm zusammenfallen.

§. 168.

Soll ein periodischer Dezimalbruch mit einer Ziffer z. B. $0{,}_{3333}\ldots\ldots$ in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so kann hier nur das mechanische Verfahren dazu angezeigt werden, da der Beweis in der Lehre von den geometrischen Progressionen enthalten ist.

Man setze für den gegebenen Fall:

$$0,_{333}\ldots = \frac{333\ldots}{1000\ldots}$$

und nun denke man sich den letzten Ausdruck um eine Periode kleiner, die man vorne wegnimmt und ziehe hierauf Zähler und Nenner des letzten Bruches von Zähler und Nenner des ersten ab, so erhält man den Werth des Dezimalbruches in einem gewöhnlichen ausgedruckt, z. E.

$$\frac{333\ldots}{1000\ldots} - \frac{33\ldots}{100\ldots} = \frac{300\ldots}{900\ldots} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

was mit der Verwandlung dieses Bruches in einen Dezimalbruch in §. 166 ganz übereinstimmt.

Für die Verwandlung des periodischen Dezimalbruches mit 6 Ziffern: $0,_{428571428571}\ldots$ in einen gewöhnlichen Bruch wäre:

$$\frac{428571.428571\ldots}{1000000.000000\ldots} - \frac{428571\ldots}{1000000} = \frac{428571000000}{999999000000}$$

was gleich ist: $\frac{428571}{999999}$. Da nun beide Theile des Bruches ein Neunfaches sind, so läßt er sich mit 9 verkleinern und man erhält: $\frac{47619}{111111}$; hierauf kann man mit 3 dividiren, wodurch entsteht: $\frac{15873}{37037}$; in diesem Ausdrucke ist Zähler und Nenner ein 11faches, da die Summe ihrer geraden und ungeraden Ziffern gleich ist, daher mit 11 verkleinert, giebt: $\frac{1443}{3367}$. Sucht man nun das größte gemeinschaftliche Maaß zwischen Zähler und Nenner letztern Bruches, s. i.:

$$\begin{array}{r|l|l} 1443 & 3367 & 2 \\ & 2886 & \\ \hline 481 & 1443 & 3 \\ & 1443 & \\ \hline & = & \end{array}$$

Dasselbe $= 481$; mit solchem gehörig dividirt, wird erhalten $\frac{1443}{3367} = \frac{3}{7} = 0,_{428571428}\ldots$; auf solche Art verfährt man

jederzeit bei den Verwandlungen der periodischen oder continuirlichen Brüche, denn beides ist immer mit einander verbunden, in gewöhnliche Brüche.

Aus den zwei letzten Beispielen kann man sich die einfache Regel zu den betreffenden Verwandlungen ableiten: „daß „die Periode des Dezimalbruches den Zähler des gewöhnlichen „Bruches giebt, und dessen Nenner aus so vielen Nennern „besteht, als die Periode Ziffern hat;“ z. B. den periodischen Dezimalbruch $123{,}46894689\ldots$ in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln, geschieht folgendermaaßen:

$$123{,}46894689\ldots = 123 + 0{,}46894689\ldots$$

$$= 123 + \frac{4689}{9999} = 123 + \frac{521}{1111} = 123\,\frac{15}{32}$$

näherungsweise.

Wäre $0{,}0256147314731\ldots$ zu verwandeln, in welchem Bruche die Periode erst nach der vierten Dezimalziffer beginnt, so verfahre man auf folgende Art: Es ist:

$$0{,}0256{,}14731473\ldots = 0{,}0256 + 0{,}0000147314\ldots$$

$= \frac{256}{10000} + \frac{1473}{99990000}$. Diese Brüche auf gleiche Benennung gebracht, giebt

gemeinschaftlicher Nenner.	256 / xøøøø	1473 / øøøøøøøø
1øøøø	øøøøøøøø	1øøøø
øøøøøøøø	3333	491
33330000	853248	491

daher:

$$\frac{256}{10000} + \frac{1473}{99990000} = \frac{853248}{33330000} + \frac{491}{33330000} = \frac{853739}{33330000}$$

$= \frac{25}{976}$ beinahe; da die Untersuchung wegen des gemeinschaftlichen Maaßes ergiebt:

853739|33330000|39
2561217
7717830
7683651
34179|853739|25 beinahe
68358
170159

also:

	39	25	
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{25}{976}$	der nächste Werth.

In solchen Fällen also, wo der Periode eines Dezimalbruches mehrere Dezimalziffern vorausgehen, ist der vollständige Werth aller Perioden gleich einem gewöhnlichen Bruche, dessen Zähler die Periodenzahl selbst ist, und der einen Nenner hat, welcher in seinen höchsten Ziffern aus soviel Neuner besteht, als die Anzahl der Ziffern in der Periode beträgt, und dessen übrige Stellen so viele Nullen sind, als der ersten Ziffer der Periode Dezimalstellen vorausgehen.

§. 169.

Von den benannten Zahlen.

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde den Zahlen oder vielmehr der Einheit, aus deren Vervielfältigung dieselben entstanden sind, kein bestimmter Werth oder Begriff beigelegt, sondern im Allgemeinen angenommen, daß nur Gleichartiges zusammengesetzt und mit einander verglichen werden könne.

So lange nun die Einheit der Zahlen bedeuten kann, was man will, nennt man diese unbenannte Zahlen *).

*) Genau betrachtet, ist jede ganze oder gebrochene Zahl, welche sich auch auf keinen Gegenstand der Sinnenwelt bezieht, eine

Bezeichnet man aber einen gewissen Gegenstand des praktischen Lebens oder irgend einen Größenbegriff als Einheit, so wird eine bestimmte Menge solcher Gegenstände oder Begriffe mit einer Zahl beschrieben, die so viele Einheiten enthält, als die Summe der Gegenstände oder Begriffe beträgt. Einer solchen Zahl hängt man den Namen ihrer Bedeutung an und heißt sie deßhalb benannte Zahl; z. B. 69 Thlr. bedeutet eine Summe von Thalern u. s. w.

Sollen zwei benannte Zahlen von einerlei Gattung addirt oder subtrahirt werden, so verfährt man auf die nämliche Art, wie mit unbenannten Zahlen, nur wird der Summe oder dem Unterschiede wieder der gleiche Name der Erzeugungszahlen beigesetzt; z. B.

Die Summe von 16 Aepfel und 44 Aepfel und 106 Aepfel wäre: 16 + 44 + 106 = 166 Aepfel.

Der Unterschied zwischen 1309 Gulden und 897 Gulden ist 1309 — 897 = 412 Gulden.

Würde gefordert, eine benannte Zahl mehrfach zu nehmen, oder sie in gleiche Theile zu theilen, so multiplicirt man dieselbe im ersten Falle, und im andern dividirt man sie mit beziehungsweise der Vielfachs- und Theilungszahl und setzt den erhaltenen Werthen den Namen der benannten Zahlen bei;

---

benannte Zahl; denn eine ganze Zahl benennt die Menge der Einheiten, Zehner ꝛc., welche man sich in einem bestimmten Falle denken muß, so wie eine gebrochene Zahl nicht nur die Art der gleichen Eintheilung einer Einheit angiebt, sondern auch wie viele solcher Theile durch ihren Ausdruck verstanden seyn sollen. In Beziehung auf letztere Zahlen seye noch bemerkt, daß jeder Nenner nicht als Zahlgröße, sondern nur als Namen nöthig ist. Würde man jeder Theilung der Einheit, durch alle möglichen ganzen Zahlen einen andern Namen geben und für die Zählung der betreffenden Theile das System der ganzen Zahlen beibehalten, so wäre an den Werthen selbst nichts geändert, sondern die Form ganz derjenigen, der eigentlich benannten Zahlen, angepaßt worden.

z. B. 5 mal 6 Eimer giebt:
$5 \times 6 = 30$ Eimer.
Der achte Theil von 64 Meß Holz ist
$64 : 8 = 8$ Meß Holz.

Wären den benannten Zahlen auch noch Theile ihrer Einheiten, entweder unter der Form gewöhnlicher Brüche, oder als Dezimalziffern beigefügt, so müßte voranstehende Erklärung in Verbindung mit den abgehandelten Lehren der verschiedenen Rechnungsarten genügend seyn, jede geforderte Vermehrung oder Verminderung benannter Zahlen richtig auszuführen. Im praktischen Leben sind aber zur Bezeichnung der verschiedenen Gattungen von Größen, sey es der Zeit oder des Raums oder der Schwere oder des Werthes, auch verschiedene Zahlensysteme angenommen, die meistens von dem Dezimalsysteme abweichen. Die Ordnungen derselben haben wiederum besondere Namen, und es ist daher vorher nöthig, sie kennen zu lernen, ehe man eine benannte Zahl, in Beziehung auf eine andere, richtig verstehen, oder sich in einer solchen mittheilen kann. Wir werden bei den Rechnungsarten die im Gebrauche stehenden Eintheilungen angeben.

In den meisten Fällen sind wir nur durch allmählige Vergleichung eines Gegenstandes mit einem andern uns bekannten, im Stande zu beurtheilen, welche Eigenschaften er besitzt und welche Bedeutung er nach den Gesetzen der Uebereinkunft in sich trägt.

Sobald sich nun gesellschaftliche Vereine gebildet hatten, mußte auch das Bedürfniß als dringend erscheinen, jene Vergleichungen, besonders an Gegenständen des materiellen Lebens, in Uebereinstimmung zu bringen und eine allgemeine Sprache für die Erfolge derselben einzuführen. Zu diesem Ende hat man der Beschaffenheit der verschiedenen Dinge und ihrem Einflusse auf das gesellschaftliche Leben entsprechend, allgemeine Maaße, welche man Normalmaaße nennt, aufgestellt, und die Gesetze bestimmt, nach welchen diese Maaße wiederum

zu einer Einheit unter eigener Benennung vermehrt, oder vermindert werden ſollen.

Die allgemeinen Maaße jeder Gattung ſind zwar ihrem Werthe nach in verſchiedenen Gegenden ſehr abweichend von einander, jedoch hat man bis jetzt alle bekannten unter ſich verglichen, ſo daß man im Stande iſt, jedes derſelben in dem Werthe eines andern auszudrucken.

Jede Gattung von Gegenſtänden kann nur mit einem Maaße von gleicher Art verglichen werden, z. B. die Zeit mit einem Theile der Zeit, die Länge mit Länge, der Raum mit Raum, das Gewicht mit Gewicht u. ſ. f.

Die verſchiedenen Zahlenſyſteme, welche zur Bezeichnung der Maaße gebräuchlich ſind, machen es nöthig, daß in ihnen jede Ordnung mit Namen beſchrieben wird. Um aber dieſe Beſchreibung ſo viel als möglich abzukürzen, iſt man übereingekommen, ſich gewiſſer Zeichen, oder der Anfangsbuchſtaben zu bedienen; z. B. ſo wird

Gulden	mit	fl.
Groſchen	"	Gr.
Batzen	"	Bz.
Kreuzer	"	xr.
Pfennig	"	Pf.
Heller	"	Hlr.
Schilling	"	ß.
Mark	"	Mrk.
Centner	"	Ct.
Pfund	"	℔
Loth	"	Lth.
Quent	"	Qt.
Grammes	"	gr.
1 Längenfuß	"	1′
1 Längenruthe	"	1°
1 Längenzoll	"	1″
1 " Linie	"	1‴
1 " Klafter	"	1°

1 Quadratfuß	mit	1′□	oder	1′²	
1 „ Ruthe	„	1°□	„	1°²	
1 „ Klafter	„	1°□	„	1°²	
1 „ Zoll	„	1″□	„	1″²	
1 „ Linie	„	1‴□	„	1‴²	
1 Kubikfuß	„	1′Cq.	„	1′³	oder 1′ Cub.
1 „ Ruthe	„	1°Cq.	„	1°³	„ 1° Cub.
1 „ Klafter	„	1°Cq.	„	1°³	„ 1° Cub.
1 „ Zoll	„	1″Cq.	„	1″³	„ 1″ Cub.
1 „ Linie	„	1‴Cq.	„	1‴³	„ 1‴ Cub.
1 Stunde	„	1 St.			
1 Minute	„	1′			
1 Sekunde	„	1″			
1 Morgen	„	1 Mg.			
1 Meile	„	1 M.			
1 Eimer	„	1 Emr.			
1 Imi	„	1 Im.			
1 Maas	„	1 Ms.			
1 Schoppen	„	1 Schp.			
1 Scheffel	„	1 Schfl.			
1 Simri	„	1 Sr.			
1 Elle	„	1 El.			

u. s. w. u. s. w.

Wir wollen nun einige Beispiele über Zahlensysteme, wie sie in Süddeutschland üblich sind, geben. In jeder Querlinie ist ein gleicher Werth, aber in verschiedenen Maaßeinheiten enthalten, so daß es in der ersten Figur heißt: 1 fl. ist so viel als 15 Bz. oder 20 Gr. u. s. w., oder 20 Gr., 15 Bz., 60 kr. u. s. w. machen einen Gulden.

1) Geld-Tarif. (Rheinländischer Fuß.)

Gulden. fl.	Batzen. Bz.	Groschen. Gr.	Kreuzer. kr.	Pfennig. Pf.	Heller. Hl.
1.	15.	20.	60.	240.	360.
	1.	4/3.	4.	16.	24.
		1.	3.	12.	18.
			1.	4.	6.
				1.	2/3.

2) Gewicht-Tarif: (Kölniſches Markgewicht.)

Centner. Ct.	Pfund. ℔	Loth. Lth.	Quent. Qt.	Sechszehntel. Aß.
1.	100.	3200.	12800	51200.
	1.	32.	128.	512.
		1.	4	16.
			1	4.

Anmerk. Beim Kaufmanns- oder Centnergewicht hat der Ct. 104 ℔. Die kölniſche Mark = ½ ℔ = 65536 Richtpfennig.

3) Apotheker-Gewicht-Tarif: (Nürnberger.)

Pfund. ℔	Unzen. ℥	Loth. ℔	Quent. ʒ	Skrupel. ℈	Gran. Gr.
1.	12.	24.	96.	288.	5760.
	1.	2.	8.	24.	480.
		1.	4.	12.	240.
			1.	3.	60.
				1.	20.

4) Geldgewicht-Tarif:

Pfund. ℔	Mark. Mrk.	Karat. Kt.	Gran. Gr.
1.	2.	48.	1152.
	1.	24.	576.
		1.	24.

5) Wein-Maaß-Tarif:

Fuder. Fdr.	Eimer. Emr.	Imi. Im.	Maas. Ms.	Schoppen. Schp.
1.	6.	96.	960.	3840.
	1.	16.	160.	640.
		1.	10.	40.
			1.	4.

Anmerk. In Württemberg beſtehen eigentlich dreierlei Eimer-Maaße

1) der Eimer Eich- oder Visir-Maaß, auch Helleich genannt.
2) der Eimer Trübeich
3) der Eimer Schenk-Maas.

Das Verhältniß, in welchem diese Maaße zu einander stehen, ist Folgendes:

1 Eimer oder 160 Maaß Helleich werden in 176 Theile getheilt, und ein solcher Theil unter dem Namen Schenk-Maas verwerthet. Zu 160 Maas Helleich werden 7 Maas gegeben, wenn der Wein noch nicht von der Hefe befreit ist, so daß ein solcher Eimer Trübeich 167 Maas Helleich enthält. (= 183 Schenk-Maaß.)

6) Frucht-Maaß-Tarif:

Scheffel. Schfl.	Malter. Malt.	Simri. Sr.	Vierling. Vlg.	Achtelen. Acht.	Ecklen. Eckl.
1.	—	8.	32.	64.	256.
	1.	6.	24.	48.	192.
		1.	4.	8.	32.
			1.	2.	8.
				1.	4.
	u. s. w.	u. s. w.			

Die Rechnungsarten mit benannten Zahlen bestehen nun darin, daß man die geforderte Veränderung mit jeder der Ordnungszahlen, wie bei den unbenannten Zahlen vornimmt, und die erhaltenen Resultate auf ihre eigenthümlichen Einheiten reduzirt.

Bei Aufgaben, welche Gegenstände betreffen, deren gebräuchliche Abmessungen noch nicht erklärt sind, werden wir den Tarif voranstellen.

---

§. 170.

Vermehrende Rechnungsart mit benannten Zahlen.

a) Durch Addition.

Man setze die gleichnamigen Zahlen, wie bei jeder Addition, untereinander, zähle die Reihe der niedersten Ordnung

zusammen, und dividire in die erhaltene Summe mit der Anzahl der Einheiten, welche dem Werthe der Einheit der nächst höhern Ordnung gleich sind. Den Rest der Division setze man unter den Namen der niedersten Ordnung, und den erhaltenen Quotienten addire man zu den Zahlen der nächst höhern. Mit der nun entstehenden Summenzahl dieser zweiten Reihe verfahre man wie bei der vorigen und so fort bis zur höchsten Ordnung, unter welcher die Summe ganz ausgesetzt wird; z. B.:

1) Jemand habe folgende Zieler einzunehmen:

bei M . . . 130 fl. 55 kr. 5 hl.
= C . . . 24 = 46 = 5 =
= J . . . 245 = 38 = 4 =
= W . . . 86 = 54 = 5 = so ist die Summe

—:• 488 fl. 16 kr. 1 hl.

Bei dieser Addition ist man nämlich folgendermaaßen verfahren:

Die niederste Ordnung der summirenden Reihen sind die Hellerzahlen, welche zusammen 19 Heller machen; da aber 6 Heller auf eine Einheit der nächst größern Ordnung, d. h. auf einen Kreuzer gehen, so dividirt man mit 6, wodurch man 3 Kreuzer und zum Rest 1 hl. erhält. Diesen Rest 1 hl. setze man unter die betreffende Ordnung und nehme den erhaltenen Quotienten 3 Kreuzer in die höhere Ordnung desselben Namens hinüber. Mit den bereits vorhandenen Kreuzer-Zahlen wird die Summe = 196 Kreuzer. Es machen jedoch 60 kr. einen Gulden, daher 196 : 60 = 3 fl. und 16 kr.; letztern Rest unter die Rubrik kr. gesetzt und den Quotienten 3 fl. zu den Guldenzahlen addirt, so stellt sich die Summenzahl zu —:• 488 fl. 16 kr. 1 hl. heraus.

2tes Beisp.: Einem Güterfuhrmann werden folgende, im Centnergewicht (1 Ctr. = 104 ℔) bezeichnete Ballen zur Fracht übergeben; man will das Gewicht der ganzen Ladung wissen.

Ballen Nrs. A — 14 Ctr. — 86 ℔
" " B — 12 " — 58 "
" " C — 10 " — 92 "

Summe = 38 Ctr. — 28 ℔

℔
104 | 236 | 2 Ctr.
208

Rest = 28 ℔

3tes Beisp. Ein Weinfuhrmann ladet 4 Fässer A, B, C, D von bekanntem Inhalte; es soll nun die Summe ihres Maaßes angegeben werden.

A hält — 1 Eim. 1 Jm. 7 Ms. 2 Schpp.
B " 1 " 2 " 6 " 1 "
C " 1 " 1 " 8 " 3 "
D " 0 " 15 " 7 " 2 "

Summe = 4 Eim. 6 Jm. " "

Schpp.
4 | 8 | 2 Ms.

Ms.
10 | 30 | 3 Jm.

Jm.
16 | 22 | 1 Eim.
16

6 Jm.

Die Summe der Schoppen ist 8, was gerade 2 Maas giebt, da 1 Ms. = 4 Schpp.; es bleibt daher kein Schoppen übrig. Diese 2 Ms. zu 7, 8, 6 u. 7 Ms. addirt, erhält man 30 Ms. = 3 Jm., da 10 Ms. = 1 Jm. u. s. w.

4tes Beisp. Die Herrschaft N. N. hat nachstehende Gülten an Frucht zu erheben, deren Gesammtbetrag man wissen möchte:

zu A — 5 Schfl. 6 Sri. 2 Vrl. 1 Achtel 3 Eckl.
" B — 4 " 6 " 2 " 0 " 2 "
" C — 3 " 4 " 3 " 1 " 3 "
" D — 6 " 5 " 2 " 1 " 2 "

Summe = 20 Schfl. 7 Sri. 3 Vrl. 1 Achtel 2 Eckl.

a) Die Summe der Ecklen = 10 = 2 Achtel und 2 Eckl.
b) 2 + 1 + 1 + 1 Achtel = 5 Achtel = 2 Vrl. und 1 Achtel.
c) 2 + 2 + 3 + 2 + 2 Vrl. = 11 Vrl. = 2 Sri. und 3 Vrl.

d) 2 + 5 + 4 + 6 + 6 Sri. = 23 Sri. = 2 Schſl. und 7 Sri.

e) 2 + 6 + 3 + 4 + 5 Schſl. = 20 Schſl.

Die Ueberſchüſſe jeder Claſſe über die letzte ganze Einheit ihrer nächſt höhern Ordnung werden unter denſelben Namen geſetzt.

§. 171.

Die Längenmaaße werden aus einer geraden Linie, deren Ausdehnung genau beſtimmt iſt, und die entweder Fuß oder Schuh heißt, zuſammengeſetzt und abgeleitet. Sowohl die Zuſammenſetzung als Eintheilung eines Schuhes geſchieht auf verſchiedene Art; doch ſucht man in neuern Zeiten beide mit dem Dezimalſyſtem der natürlichen Zahlen in Einklang zu bringen, wodurch ihre Behandlung bei Rechnungsfragen ſehr vereinfacht wird.

Ehemals hat man in Württemberg 16 Schuhe für die größere Längen-Einheit oder eine Ruthe zuſammengeſetzt, wozu jetzt nur noch 10 Schuhe genommen werden, ſo daß die neuere Ruthe um 6 Schuh kleiner iſt als die ältere.

Der Schuh ſelbſt iſt eine unveränderliche Maaßgröße geblieben.

Ebenſo wurde früher der Schuh oder Fuß in zwölf Theile oder Zolle, jeder Zoll wieder in zwölf Linien, jede Linie in zwölf Punkte u. ſ. f., überhaupt die Einheit einer Ordnung in zwölf Theile der nächſt niedern getheilt und dieſe Theilung das Duodezimalſyſtem genannt.

Die Zuſammenſtellung dieſes Syſtems wäre:

	Ruthen.	Schuhe.	Zolle.	Linien.	Punkte oder Skrupel	u. ſ. w.
Zeichen:	o	′	″	‴	IV	
	1.	16.	192.	2304.	27648.	
		1.	12.	144.	1728.	
			1.	12.	144.	
				1.	12.	

Bei diesem Systeme geschieht demnach die Reduktion kleinerer Theile zu den Einheiten der nächst größern Ordnung, durch die Division mit 12, bis zu den Schuhen, bei welchen mit 16 dividirt werden muß, um in dem Quotienten die Anzahl der 16schuhigen Ruthen zu erfahren.

Daß diese Berechnung etwas Unbequemes hat, wird man einsehen.

Dagegen hängt das Dezimalsystem des Längenmaaßes folgendermaaßen zusammen:

Zeichen:	Ruthen. °	Schuhe. ′	Zolle. ″	Linien. ‴	Punkte ꝛc. IV
	1.	10.	100.	1000.	10000.
		1.	10.	100.	1000.
			1.	10.	100.
				1.	10.

Es gehören in diesem Systeme immer 10 Einheiten der niederen Ordnung dazu, um eine Einheit ihrer nächst höhern auszumachen; ganz so wie bei dem natürlichen Zahlensysteme; daher man auch jedes Maaß, welches nach dieser Eintheilung gegeben ist, wie gewöhnliche Zahlen zusammensetzen kann. In jedem derartigen Ausdruck muß jedoch entweder die Gattung der Theile der ersten Ziffer oder der letzten mit dem entsprechenden Zeichen angedeutet seyn, und im Falle zwischen andern eine Gattung keine Zahl hat, für solche eine Null gesetzt werden, weil in der Ordnung der Ziffern, wie bei den Zahlen, auch ihr Werth liegt. Versieht man die erste Ziffer eines Maaßausdruckes mit ihrem Gattungszeichen, so kann man solche zu gleicher Zeit als die ganze Zahl, und die übrigen für ihre Dezimalstellen ansehen. Befindet sich aber dasselbe an der letzten Ziffer, so ist der ganze Ausdruck die ganze Zahl der bezeichneten Theile; z. B. 6 Ruthen, 5 Fuß, 3 Linien, 8 Punkte kann beschrieben werden entweder:

6°,5038 Ruthen, oder
65′,038 Fuße, oder
650″,38 Zolle, oder
6503‴,8 Linien oder
65038^{IV} Punkte.

Weil keine Einheitszahl für Zolle vorhanden ist, so mußte an ihre Stelle eine 0 gesetzt werden.

Sind mehrere Dezimallängenmaaße gegeben, deren Summe man finden soll, so wird hiebei auch jederzeit die Bedingung mit verbunden seyn, in welcher Größengattung die höhere Ordnungszahl bestehen müsse. Ehe man nun die gegebenen Maaßzahlen addirt, bringt man jede einzelne auf diejenige Benennung, welche die Forderung ausspricht. Nach diesem setzt man die gleichnamigen Ziffern untereinander und verfährt wie bei der Addition der Dezimalbrüche oder ganzen Zahlen; z. B.: es soll die Summe in Ruthen gesucht werden von:

1) 25° 4″ 3‴ 4^{IV} was gleich ist: 25°,0434;
2) 4′ 8‴ 9^{IV} = = = 0,4089;
3) 1° 7′ 8″ 3‴ = = = 1,7850;
4) 7° 5^{IV} = = = 7,0005;

daher die Summe = 34°,2358 Ruthen.

Diese Summe wird ausgesprochen, entweder:
„34 Ruthen, 2 Zehntl, 3 Hundertel, 5 Tausendel und 8 Zehntausendel;“ oder]
„34 Ruthen, 2 Fuß, 3 Zoll, 5 Linien und 8 Punkte.“

Letzterer Aussprache gemäß wäre die ausführliche Bezeichnung: 34° 2′ 3″ 5‴ 8^{IV}.

Wollte man die Summe in Fußen wissen, so darf man die Ruthenzahl nur mit 10 multipliciren, d. h. das Komma, welches in solcher die Ganzen abschneidet, um eine Stelle rechts rücken, worauf man erhält: 342′,358 Fuße
abermals mit 10 vermehrt: 3423″,58 Zolle
= = = = 34235‴,8 Linien
= = = = 342358^{IV} Punkte.

Man hätte freilich auch die Maaßtheile unter die gleichen Zeichen setzen und so addiren und reduziren können; aber das so eben angegebene Verfahren ist gewiß seiner Kürze und Bequemlichkeit halber jedem andern vorzuziehen.

2tes Beisp. Die gegebenen Längenmaaße:

a) 625′,3078, b) 5°,95344, c) 5″,68;

d) 36‴,01, e) 46^{IV} und f) 442′ so zu addiren, daß man die Anzahl der ganzen Schuhe und ihrer Theile erhält; zu diesem Ende verfährt man:

a) . . . 625′,3078
b) 59,5344
c) 0,5680
d) 0,3601
e) 0,0160
f) 442,0000

Summe = 1127′,7863 Fußen.

In Dezimal-Ruthen wäre diese Summe = 112°,77863.

§. 172.

Da es ohnerachtet des in Württemberg gesetzlich eingeführten Dezimalsystems doch noch häufig vorkommt, daß in diesem Lande sich die Handwerksleute des Duodez-Maaßstabes bei ihren Abmessungen bedienen, so sollen auch einige Beispiele über die Summirung solcher Maaße hier stehen. Es sollte kaum nöthig seyn, zu bemerken, daß es bei Angabe solcher Maaße unumgänglich nöthig ist, den Namen ihres Theilungssystems beizusetzen, wenn keine Irrungen vorfallen sollen. Die Einheiten der Maaßzahlen unter den Schuhen sind in dem Duodezsystem beträchtlich kleiner als die der nämlichen Gattung im Dezimalsystem; auch können jene nicht wie die natürlichen Zahlen behandelt werden, weil 12 Einheiten einer Ordnung die Einheit ihrer nächst höheren ausmachen und umgekehrt; sonach bei den Reduktionen ein Rest 11 vorkommen kann, was ganz verschieden mit der Zehntheilung ist,

in welcher kein größerer Rest als 9, die höchste Einheitszahl, vorkommt. Bei Zahlen der Duodezmaaße muß das Zeichen ihrer Gattung jedesmal beigefügt werden.

1tes Beispiel. Die Duodez-Maaße:

1) $125' - 3'' - 10''' - 11^{IV}$, 2) $13' - 11'' - 7''' - 9^{IV}$,
3) $11'' - 8''' - 3^{IV}$, 4) $2' - 9'' - 9'''$ zu summiren und den Betrag einmal bis zu Fußen und das anderemal bis zu 16schuhigen Ruthen zu reduziren; so ist

A)	Nro. 1 =	125′	3″	10‴	11^{IV}
	" 2 =	13	11	7	9
	" 3 =		11	8	3
	" 4 =	2	9	9	0
	Summe =	143′	0″	11‴	11^{IV} Duodez-L.Mß.

B) Weil 16 Schuh zu einer Ruthe verlangt werden, so kann solche nur in 143′ ganz enthalten seyn, und durch Division mit 16 erfährt man, wie oft; also auch obige Summe $= 8^{\overset{16sch.}{\square}} - 15' - 0'' - 11''' - 11^{IV}$ Duodez-L.Mß.

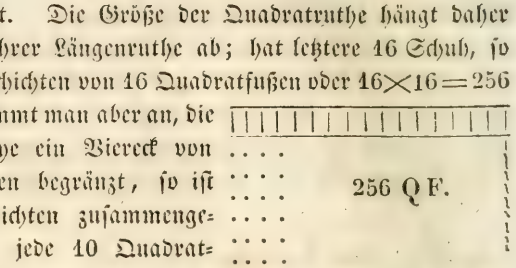
C) Neben Beibehaltung der Duodez-Theilung des Schuhes könnte verlangt werden, aus der Summe der ganzen Fuße 10schuhige Ruthen auszuscheiden, und in diesem Falle wäre das Resultat;

$$14^{\overset{Dec.}{\square}} - 3' - 0'' - 11''' - 11^{IV} \text{ Duodez-Mß.}$$

§. 173.

Zur Ausmessung der Flächen bedient man sich der sogenannten Quadrat-Maaße. Die Grundlage dieser Maaße bildet der Quadrat-Fuß. Solchen muß man sich als ein Viereck A B C D vorstellen, dessen vier Seiten AB, CD, AC, BD genau einem Längenfuß, und die zwei Diagonalen BC und AD einander gleich sind. Die nächst größere Flächeneinheit

ist die Quadratruthe, ein ähnliches Viereck wie der Quadratfuß, nur daß jede Seite AB = CD = AC = BD eine Längenruthe mißt. Die Größe der Quadratruthe hängt daher von der Größe ihrer Längenruthe ab; hat letztere 16 Schuh, so enthält jene 16 Schichten von 16 Quadratfußen oder $16 \times 16 = 256$ Quadratfuß. Nimmt man aber an, die Quadratruthe seye ein Viereck von 10schuhigen Seiten begränzt, so ist sie aus 10 Schichten zusammengesetzt, auf deren jede 10 Quadratfuße gehen oder gleich einer Fläche von $10 \times 10 = 100$ Quadratfuß. Diese Quadratruthe nennt man die Dezimalquadratruthe.



Im Württembergischen hat man früher, als die 16schuhigen Längenruthen noch im Gebrauche waren, nur Quadratruthen gekannt, die auf jeder Seite 16 Fuß messen, oder deren Fläche gleich 256 Quadratfuß ist. Einen Flächengehalt von 150 solchen Ruthen, oder von 38,400 Quadratfußen, nannte man einen Morgen und nahm solchen als die Einheit des Maaßes für den Grundbesitz an. Ob nun gleich der Dezimalrechnung zu lieb, seitdem die Längenruthe um 6 Längenfuße verkürzt und zu 10 Fuß, so wie die Quadratruthe zu 100 Quadratfuß festgesetzt wurde, so hat man doch nicht gewagt, so stark gegen alles Herkömmliche anzustoßen, daß man den erhärteten Begriff des Landmannes von Eigenthumsgröße umgeworfen hätte; sondern man ließ den Morgen bei der neuen Eintheilung in seinem Gehalte von 38,400 Quadratfußen unverändert. Vielleicht trug hiezu auch der Umstand bei, daß diese Zahl am Ende zwei Nullen hat, und daher leicht in Dezimalquadratruthen durch Division mit 100 Quadratfuß verwandelt werden kann, indem man nur die zwei Nullen wegstreichen darf. Durch diese Division zeigt sich demnach, daß der württembergische Morgen = 384 Dezimalquadratruthen enthält.

Betrachtet man nun auch die kleinern Flächenmaaße, welche Theile des Quadratfußes sind.

Zunächst wird dieser Fuß in Quadratzolle zerlegt, deren Anzahl und Größe, ganz von der angenommenen Eintheilung des Längenfußes abhängt. Bei der 12theiligen Skale enthält derselbe 12 Lagen von 12 Quadratzollen, d. i. 144 Quadratzoll; ein solcher Quadratzoll wieder 12 Lagen von 12 Quadratlinien oder 144 Quadratlinien u. s. f.

Bei der Dezimaltheilung des Quadratfußes kommen auf solchen 100 Quadratzolle, auf einen Quadratzoll 100 Quadratlinien u. s. f.

Verbindet man nun mit der Duodez-Eintheilung des Quadratfußes die früher in Württemberg bestandenen 16schuhigen Quadratruthen, so ist in Folgendem die Uebersicht der Werthe solcher Flächenmaaße in ihrem Zusammenhange dargestellt:

Morgen. Quadr.-Ruth. Quadr.-Fuße. Quadr.-Zolle. Quadr.-Lin. ꝛc.				
Zeichen: Mg.	□°	□′	□″	□‴
1.	150.	38400.	5529600.	796262400.
	1.	256.	36864.	5308416.
		1.	144.	20736.
			1.	144.

Bei dieser Eintheilung werden bis zu den Quadratfußen die Zahlen einer Maaßgattung durch 144 dividirt, um in dem Quotienten die Anzahl Einheiten der nächst höhern Ordnung zu erhalten. Die Anzahl der Quadratfuße dividirt man mit 256, um zu erfahren, wie viel Quadratruthen sie beträgt, und wenn man die Summe der Quadratruthen mit 150 dividirt, so zeigt der Quotient die Morgenzahl an.

Die gleichen Werthe der Flächenmaaße in der Dezimaltheilung sind folgende:

Morgen. Quadr.-Rth. Zeichen: Mg.	Quadr.-Fuß. □′	Quadr.-Zollen. □″	Quadr.-Lin. ꝛc. □‴
1. 384.	38400.	3840000.	384000000.
1.	100.	100000.	1000000.
	1.	100.	10000.
		1.	100.

Von der niedersten Gattung der Flächenmaaße an, bis zu den Quadratruthen, erfährt man durch die Division mit 100, wie viel Einheiten der nächst höhern Ordnung in einer Anzahl Maaße enthalten sind. Die Zahl der Morgen erfährt man aus den Quadratruthen, durch die Division solcher mit 384.

§. 174.

1) Es sind folgende Flächenmaaße gegeben, bei welchen die Ruthe 16schuhig, und der Quadratfuß nach dem Duodezimalsystem*) eingetheilt, angenommen ist; man soll ihre Summen in den nämlichen Maaßen bis zu Morgen angeben:

a)	105□	(16schh.)	120′□d.		95″□d.		142‴□d.	
b)	149□	=	0.	=	135″□d.		88‴□d.	
c)	79.	=	50.	=	64	=	103.	=
d)	129.	=	247.	=	110	=	24.	=
e)	24.	=	219.	=	58	=	96.	=
	256 490 | 1		639 | 4		465 | 3		453 3	
	256 |		576 |		432 |		432 |	
	234		= 63		= 33		= 21	

1 Morgen, 234□ (16schh.), 63′□, 33″□, 21‴□ Duod. M.

2) In nachstehenden Maaßen liege der Quadratruthe die 10theilige Längenruthe zu Grunde, so daß also 100′□ = 1□ ist; die Theilung des Quadratfußes bleibe aber wie vorher Duodezfach; man verlangt, die Summe bis zu Morgen anzugeben:

*) Es ist hier mit d das zwölftheilige Maaß bezeichnet. Das Zehntheilige könnte man mit dec. andeuten.

a) 3 M.,	585°□dec.	97′□,	44″□d.,	56‴□d.,	79^{IV} □d.
b)	207	3	86	93	2
c) 50 =	0	81	57	68	0
d) 28 =	175	29	92	83	90
1,	767 (1, 384	2,11*)	280 (1, 144	281 (1, 144	171 (1 144
	383		136	137	= 27

82 Mg., 585°□dec. 11′□, 136″□, 137‴□, 27^{IV} □dM

3) Werden die Flächenmaaße, außer dem Morgen, durchgängig in der Dezimaltheilung angegeben, so lassen sie sich wie gewöhnliche Dezimalbrüche, oder wie ganze Zahlen, schreiben, indem man die Ziffern der Werthe in der nämlichen Ordnung, wie solche auf einander folgen, von der größern zur kleinern, zusammensetzt. Zur Verständigung diene Folgendes: ein Maaß von 6°□ — 45′□ — 78″□ kann geschrieben werden: 6°□′4578 oder = 64578″□; denn Eine Quadratruthe hat 100 Quadratschuhe, der zehnte Theil einer Quadratruthe, oder von 100′□ ist sonach 10′□; daher 4 mal der zehnte Theil = 40′□, hierauf 5 mal der hunderte Theil einer Q.Ruthe oder von 100′□ ist soviel als 5′□; also 4 mal der zehnte und 5 mal der hunderte Theil einer Quadratruthe bedeuten in dem vorstehenden Dezimalbruch 45′□, wie es seyn soll. Ebenso kann bewiesen werden, daß in demselben der 7 mal tausende und der 8 mal zehntausende Theil einer Dezimalquadratruthe zusammen 78″□ machen.

Man solle nun die Summe nachstehender Flächenmaaße, bei denen sowohl die Ruthe, als der Fuß, zehntheilig ist, in der kürzesten Form darstellen;

*) Die Division mit 100 geschieht dadurch, daß man die letzten zwei Ziffern einer Zahl mittelst eines Kommas abschneidet. Von diesem Komma links steht die ganze Zahl des Quotienten und rechts der Rest.

a) 5 Mrg. 165°□ — 34′□ — 88″□
b) 23 „ 344. — 73. — 56.
c) 11 „ 291. — 69. — 40.
d) 36 „ 339. — 79. — 63.

so können solche Maaße als Dezimalbrüche untereinander gesetzt, und als solche addirt werden, wie folgt:

a) 5 Mrg. 165°□,3488.
b) 23 „ 344 ,7356.
c) 11 „ 291 ,6940.
d) 36 „ 339 ,7963.

75 Mrg. 1141°□,5747 Decim.

In dem Dezimalbruch bedeutet die ganze Zahl 1141 Quadratruthen, von denen 384 auf 1 Morgen gehen; dividirt man nun mit letzterer Zahl in jene Summe, und addirt den ganzen Quotienten, welcher Morgen angiebt, zu den schon vorhandenen 75 Morgen, so ist jede Maaßgattung in der größtmöglichen Zahl ausgedruckt. Die Resolvirung giebt:

77 Mrg. 573°□,5747 Quadratruthen Decim.

Will man jede Ordnung des Maaßes besonders wissen, so kann man den Summenausdruck wieder so geben:

77 Mrg. — 573°,□ — 57′□ — 47″□ Decim.

wobei für jede Classe der Rest mit 100 multiplicirt, d. i. mit dem Komma um zwei Zifferstellen gegen die Rechte gerückt werden muß.

2tes Beispiel. Mit Dezimaltheilung zu addiren;
a) 44 Mrg. — 177°□, — 54′□, — 66″□ Dec.
b) 5 „ 342°□,8901568 Dec.
c) 125′□,81138 Dec.
d) 9314866″□ Dec.
e) 300″□,458794 Dec.

Man bringe Alles auf gleiche Benennung und addire wie gewöhnlich:

a) 44 Mrg. 177°□,5466000.
b) 5 = 342 ,8901568.
c) . . . . . 1 ,2581138.
d) . . . . . 931 ,4866000.
e) . . . . . 0 ,03458794.

Summe = 49 Mrg. 1453°□,21605854 =
= 52 Mrg. 301°□,21605854 oder
= 52 Mrg. 301°□, 21′□, 60″□, 58‴□, 54^{IV} □ Dec.

§. 175.

Es war und ist noch in Württemberg gebräuchlich, die Morgeneinheit in 2, in 4, in 8 und in 16 Theile zu theilen, und die Flächengehalte in ganzen, halben, viertels, achtels und sechszehntels Morgen anzugeben. Einen Rest des Maaßes, welcher kleiner als $\frac{1}{16}$ Morgen ist, bezeichnet man wie vorhin mit Ruthen u. s. w.

Wir wollen nun die Werthe dieser verschiedenen Theile in Dezimalquadratruthen hier zusammenstellen:

	1 Morgen,	½ Mrg.,	¼ Mrg.,	⅛ Mrg.,	$\frac{1}{16}$ Mrg.
Quadratruthen:	384	— 192	— 96	— 48	— 24.

Wird nun gefordert, die im letzten Beispiele erhaltene Maaßzahl: 52 Mrg. 301°□,21605.... in der angeführten Eintheilung auszudrucken, so fängt man damit an, den Werth von ½ Mrg. = 192°□ von 301°□, welches kein ganzer Morgen mehr ist, abzuziehen, wobei natürlich die Voraussetzung gilt, daß ½ Mrg. nur einmal ganz in dieser Ruthenzahl enthalten seyn kann; ist solches vollbracht, so weiß man wieder zum Voraus, daß der Werth von ¼ Mrg. = 96°□ nur 1 mal in dem erhaltenen Rest 109°□ stecken kann, daher ziehe man 96 von 109 ab, wornach 13°□ übrig bleiben. Diese Zahl ist nun kleiner als die Werthe von ⅛ und $\frac{1}{16}$ Morgen, weßhalb man sie als Ruthenzahl beibehält und nun den vollständigen Gehalt des vorgegebenen Maaßes auf folgende Benennung gebracht hat:

52 Mrg. — ½ Mrg. — ¼ Mrg. 13°□,21605854,

oder nach der Aussprache, welche häufiger ist:

52¾ Morgen — 13,21605854 Quadratruthen Dec.

Es giebt noch eine Gattung von Flächeneinheit, die größer als ein Quadratfuß ist, und Quadratklafter genannt wird. Die Quadratklafter besteht in einem Quadrat, dessen Seite 6 Fuß mißt und dessen Fläche daher 36 Quadratfuße enthält. Sie wird in Oestreich bei allen Flächenmessungen, in Württemberg nur als Holzmaaß angewendet. In Frankreich war sie früher unter dem Namen Toise im Gebrauch. Die Größe der Klafter hängt jederzeit von der Länge des landesüblichen Fußes ab, da jede Seite ihres Umfanges 6 solcher Fuße lang seyn muß. Werden nun mehrere Flächengehalte statt in Ruthen in Klafter gegeben, so darf man nur die Summe der Quadratfuße mit 36 dividiren, um diese in jene zu verwandeln. In Württemberg nennt man eine Masse Holz, die im senkrechten Durchschnitt eine Quadratklafter hält, eine Klafter (Meß). Die Länge des Holzes muß gesetzlich 4 Schuhe betragen. Diese Holzklafter wird wieder auf folgende Art eingetheilt:

ganze Klafter	$\frac{1}{2}$ Kl.	$\frac{1}{4}$ Kl.	$\frac{1}{8}$ Kl.	Ecklein
1	2	4	8	16

Bei dieser Eintheilung geschieht sonach die Reduktion kleinerer Theile auf eine höhere Einheit durch die Division mit 2.

§. 176.

Die Grundeinheit der Körper- oder Kubikmaaße ist der Kubikfuß, welcher die Form eines Würfels hat, der von 6 Flächen, jede einem Quadratfuße gleich und unter sich rechtwinklicht verbunden, begränzt ist.

Nimmt man eine der Flächen als Grundfläche an, denkt sich solche in ihre Quadratzolle, Quadratlinien u. s. f. getheilt, und durch jede Theilungslinie eine Fläche senkrecht auf die Grundfläche oder parallel mit den Seitenflächen gelegt, so hat man dadurch so viele einen Fuß hohe Raumfächer abgeschnitten, als die Zahl der Theile des Quadratfußes beträgt. Stellt

man sich hierauf vor, die senkrechte Höhe des Würfels, welche ja auch einem Schuh gleich ist, seye in die nämliche Zahl und Gattung Theile, wie eine Seite der Grundfläche getheilt, und mit letzterer parallel durch jeden Theilpunkt eine Fläche gelegt, so werden diese mit den vorigen Fächern so viele Raumtheile begränzen, als das Produkt beider Zahlen ausmacht. Z. B. der Quadratfuß, welcher die Grundfläche des Würfels vorstellt, seye in 100″□ getheilt, so erhält man durch die Errichtung der senkrechten Ebenen in den Theilungslinien 100 Räume, die einen Quadratzoll im Durchschnitt und einen Fuß Länge haben; jeder dieser Räume wird aber durch die 10 Flächen, die man in der Höhe von 1 Zoll übereinander durch den Würfel parallel mit der Grundfläche sich denkt, wieder in 10 Theile, daher die 100 Fächer zusammen in $100 \times 10 = 1000$ Theile getheilt. Ein solcher $\frac{1}{1000}$te Theil eines Kubikfußes heißt ein Kubikzoll des Dezimalsystems. Theilt man den Kubikzoll wieder auf die gleiche Weise, wie den Kubikfuß ein, so erhält man abermals 1000 Theile, wovon der einzelne der $\frac{1}{1000}$te Theil eines Kubikzolles und der $\frac{1}{1000000}$te Theil eines Kubikfußes ist und Kubiklinie heißt. Setzt man in diesem Systeme die Theilung noch weiter fort, so erhält man zunächst Kubikpunkte u. s. f.

In dem Duodezimal-System ist der Kubikfuß

in $144 \times 12 = 1728$ Kubikzolle, der Kubikzoll

= $144 \times 12 = 1728$ = Linien, die Kubiklinie

= $144 \times 12 = 1728$ Kubik-Punkte u. s. w. eingetheilt, und sind diese Theile natürlich kleiner als die gleichnamigen der Dezimaltheilung.

Die größte Einheit des Körper- oder Kubikmaaßes ist die Kubikklafter *), es mag nun der Kubikschuh im Dezimal- oder Duodezimal-System getheilt seyn. Die Kubikklafter ist ein Würfel, dessen Länge, Breite und Höhe 6 Fuße beträgt,

*) Hierunter sind nämlich die Vergleichungen der Weltkörper, wozu Kubikmeilen gebraucht werden, nicht mitverstanden.

und aus diesem Grunde einen Inhalt von $6 \times 6 \times 6 = 216$ Kubikfußen besitzt.

Uebersicht der Werthe des Kubikmaaßes im Duodezimalsystem.

Klafter.	Fuße.	Zolle.	Linien u. s. w.
$1^{\circ Cq.}$	$216^{'Cq.}$	$373248^{''Cq.}$	$504972544^{'''Cq.}$
	1	1728	2985984
		1	1728

Uebersicht der Werthe des Kubikmaaßes im Dezimalsystem.

Klafter.	Fuße.	Zolle.	Linien u. s. w.
$1^{\circ Cq.}$	$216^{'Cq.}$	$216000^{''Cq.}$	$216000000^{'''Cq.}$ *)
	1	1000	1000000
		1	1000

§. 177.

Bei dem Duodezimalsystem erhält man nach Vorstehendem aus einer Summe Kubiklinien die ganzen Kubikzolle, durch ihre Division mit der Zahl 1728, und aus einer Summe Kubikzollen die ganzen Kubikfuße durch die Division mit der nämlichen Zahl. Die Summe der Kubikfuße aber muß mit 216 dividirt werden, wenn man die Anzahl der Kubikklafter wissen will, welche in derselben stecken.

Beispiel. Man solle nachstehende Duodezkubikmaaße addiren, und die Summe in den größtmöglichen Einheiten angeben.

1)	$50^{\circ Cq.}$	$175^{'Cq.}$	$1590^{''Cq.}$	$869^{'''Cq.}$
2)	5 —	209 —	785 —	1650
3)	17 —	188 —	1344 —	1321
4)	41 —	173 —	1435 —	1529
	96 —	747 (3	5156 (2	5169 (2
		648 (	3456 (	3456 (
	Reste	99	1700	1713
Summe $= 96^{\circ Cq.}$		$99^{'Cq.}$	$1700^{''Cq.}$	$1713^{'''Cq.}$ i. Duod. M.

*) Das Zeichen Cq. bedeutet Kubikmaaß und ist dem französischen Worte cubique entnommen.

Bei der Dezimaltheilung geschieht die Reduktion der kleinern Kubikmaaße auf Einheiten der nächst größern, bis zu den Schuhen, durch die Division mit 1000. Die Kubikklafter wird, wie vorhin, aus der Anzahl der Kubikfuße ausgeschieden, indem man in letztere mit 216 dividirt. Hängt man in einem gegebenen Kubikmaaße der Zahl der Kubikfuße, die Zahlen der andern Maaßgattungen ihrer Ordnung nach an, indem man jeder Gattung drei Zifferstellen einräumt, und unterscheidet von solchem die Fuße mittelst eines Komma, so ist das Kubikmaaß von den Schuhen an, welche die ganze Zahl bilden, in einem Dezimalbruch richtig ausgedruckt. Z. B. 203 K.Fuß, 316 K.Zolle, 825 K.Linien, 90 K.Punkte, wäre gleich dem Dezimalbruch $203^{'Cq.},316825090$.

Die Klafterzahl, welche vorkommen kann, wird dem Dezimalbruche mit ihrer besondern Bezeichnung vorausgesetzt. Man hätte zwar den dargestellten Dezimalbruch auch als ganze Zahl schreiben können, nämlich:

$203316825090^{IV\,Cq.}$, in welcher Form solche Dezimalkubik-Punkte bedeuten würde; es dient aber derselbe zur leichtern Uebersicht einer Größe und darum wollen wir uns nur der Dezimalbrüche bedienen. Es ist also vor Allem nöthig, die Maaße, welche addirt werden sollen, in solche Brüche, mit gleicher Benennung zu verwandeln.

1tes Beispiel. Man solle addiren die Dezimalkubik-Maaße:

1)	$50^{Cq.}$	Klafter	$933^{'Cq.}$	$767^{''Cq.}$	$4^{'''Cq.}$
2)	107	"	500	69	81
3)	19	"	86	105	996

so kann man setzen:

1)	$50^{oCq.}$	$933^{'Cq.}$	,767004
2)	107	500	,069081
3)	19	86	,105996
Summe =	$176^{oCq.}$	$1519^{'Cq.}$	,942081 Dez.M.

Dividirt man mit 216 in die Zahl 1519 der ganzen Ku-

bikfuße, so erhält man zum Quotienten 7, was Klafter bedeutet und zum Rest auch 7, nämlich Kubikfuße. Addirt man nun erstern zur vorhandenen Zahl der Klafter und setzt letztern an die Stelle der ganzen Zahl im Dezimalbruch, so ist die gefundene Summe in den größten Maaßtheilen ausgedruckt =

$183^{\circ\,Cq.}\ \ 7',^{Cq.}942081$ Dez.M.

Trennt man die einzelnen Maaßgattungen wieder, so erhält man:

$183^{\circ Cq.}\ \ 7'^{Cq.}\ \ 942''^{Cq.}\ \ 81'''^{Cq.}$

2tes Beispiel. Es sind folgende Kubikmaaße im Dezimalsysteme gegeben, welche addirt werden sollen:

1) $126^{\circ Cq.}\ \ 33'^{Cq.}\ \ 55'',^{Cq.}0689.$
2) $36^{\circ Cq.}\ \ 57989844'''^{Cq.}$
3) $27^{\circ Cq.}\ \ 3416'^{Cq.}$
4) $6^{\circ}\ \ 57101^{IV\,Cq.}$
5) $1^{\circ}\ \ 8^{IV\,Cq.},7$

man bringe diese 5 Maaße auf gleiche Benennung:

1)	$126^{\circ Cq.}$	$33',^{Cq.}$	055068900
2)	36	57 ,	989844000
3)	27	3416 ,	000000000
4)	6	0 ,	000057101
5)	1	0 ,	000000008,7
	196	3507,	044970009,7 Dez.M.

$+\ 16$

$$\begin{array}{r|l|l} 216 & 3507 & 16 \\ & 216 & \\ \hline & 1347 & \\ & 1296 & \\ \hline & \text{Rest } 51 & \end{array}$$

Summe = $212^{\circ Cq.}\ \ 51',^{Cq.}044970009,7$. Diese Summe in die einzelnen Maaßgattungen aufgelöst, giebt:

$212^{\circ Cq.}\ \ 51'^{Cq.}\ \ 44''^{Cq.}\ \ 970'''^{Cq.}\ \ 9^{IV\,Cq.},7$

§. 178.

Das Normalmaaß für die Zeit ist die Dauer einer ganzen Umdrehung der Erde um sich selbst und heißt ein Tag. Der Tag wird wieder in 24 gleiche Zeitabschnitte, welche man Stunden nennt, abgetheilt. Von der Stunde abwärts bedient man sich der Sexagesimal-Eintheilung, um so kleine Zeittheile anzuzeigen, als man will. Eine Stunde nämlich hat nach solcher 60 Minuten, 1 Minute 60 Sekunden, 1 Sekunde 60 Tertien u. s. f., wie hier dargestellt ist:

Tag.	Stunde.	Minute.	Sekunde.	Tertie.
1.	24.	1440.	86400.	5184000 ꝛc.
	1.	60.	3600.	216000
		1.	60.	3600
			1.	60

u. s. w. u. s. w.

Man sieht hieraus, daß 60 der kleinern Zeittheile hinter den Stunden dazu gehören, um eine Einheit der nächst höhern Ordnung zu erzeugen, wodurch das Reduktionsverfahren erklärt ist. Die Stundenzahl wird durch 24 dividirt, um die Anzahl Tage, welche dieselbe enthält, zu erfahren. Die aus Tagen zusammengesetzten Zeiträume hängen folgendermaaßen zusammen:

7 Tage = 1 Woche

28 } Tage = 4 Wochen
29 } Tage = 4 = 1 Tag
30 } Tage = 4 = 2 =
31 } Tage = 4 = 3 = } = 1 Monat

365 } Tage = 52 Wochen 1 Tag
366 } Tage = 52 = 2 = } = 12 Monat = 1 Jahr

Namentlich kommen auf die Monate:

Januar, Merz, May, July, August, October, December	31 Tage	April, Juni, September, November	30 Tage

Februar hat gewöhnlich 28 Tage und von 4 zu 4 Jahren in einem Schaltjahr 29 Tage, so daß also ein gewöhnliches Jahr 365 Tage und

= Schalt = = 366 = enthält.

Jede Jahreszahl der christlichen Zeitrechnung, welche mit 4 dividirt werden kann, bezeichnet ein Schaltjahr.

1tes Zeitbeispiel. Es soll addirt werden:

1)	23	Stunden,	44	Min.,	54	Sek.	8 Tertien
2)	16	=	35	=	46	=	10 =
3)	21	=	58	=	37	=	49 =
4)	8	=	51	=	28	=	59 =

Die verschiedenen hier vorkommenden Zeitgattungen werden der Kürze halber auf folgende Art bezeichnet:

1 Stunde mit 1 St. 1 Sekunde mit 1″
1 Minute = 1′ 1 Tertie = 1‴

u. s. w. u. s. w.

Daher das vorstehende Beispiel sich darstellt:

1)	23 St.	— 44′	— 54″	— 8‴
2)	16 =	— 35	— 46	— 10
3)	21 =	— 58	— 37	— 49
4)	8 =	— 51	— 28	— 59
	71	190 (3	167 (2	126 (2
		180	120	120
		10	47	6

Summe = 71 St. — 10′ — 47″ — 6‴

Verwandelt man mit 24 die Stunden in Tage, so ist Summe = 2 Tag — 23 St. — 10′ — 47″ — 6‴.

2tes Zeitbeispiel. Wenn vom 30. Juli 1830 an, 7 Jahre, 5 Monate, 3 Wochen und 25 Tage abgelaufen sind,

welchen Tag des Monats, welchen Monat des Jahrs, und welches Jahr nach der christlichen Zeitrechnung wird man betreten haben?

Zur Auflösung dieser Aufgabe ist es nöthig, die Ordnungszahlen der Monate im Jahre zu wissen; sie sind folgende:

1. Jannar.	5. May.	9. September.
2. Februar.	6. Juny.	10. October.
3. Merz.	7. July.	11. November.
4. April.	8. August.	12. December.

Der Zeitraum vom Anfang der Zählung an bis zum 30. Juli 1830 wird gleich seyn:

Jahr.	Monat.	Wochen.	Tage.
1829	6	4	2
hiezu die gegebene Zeit addirt:			
7	5	3	25
1836	11	7	27

Der Ueberschuß von 11 Monaten geht in den 12ten Monat des Jahrs 1837, d. i. in den Dezember hinein, welcher aus 31 Tagen oder 4 Wochen und 3 Tagen besteht; zieht man nun den Werth dieses Monats von 7 Wochen und 27 Tag ab und zählt ihn selbst zu den schon vorhandenen 11 Monaten, so ergiebt sich:

1837 J. — 0 Mt. — 3 Wochen — 24 Tag.

Man hat 0 für die Monatszahl des Jahres 1838 erhalten, was heißt, daß noch kein Monat in diesem Jahre verflossen ist, daher die noch übrigen Wochen und Tage dem ersten Monat Januar angehören.

Es sind aber 3 Wochen = 21 Tage; werden hiezu die 24 Tage addirt, so erhält man 45 Tage. Der Monat Januar hat nur 31, es gehen demnach 45 um 14 Tage darüber hinaus in den Februar hinein, wornach die Reduktion ergiebt: 1837 J. — 1 Mt. — 14 Tag, welche der Aufgabe gemäß

verflossen sind; weßhalb der nächste Tag „der 15. Febr. des Jahrs 1838 wäre.“

3tes Zeitbeispiel. Welches Datum hat der 4325te Tag nach dem 6. August des J. 1834?

Auflösung. Von der Zeitrechnung an, bis zum 6. August 1834 ist es ein Raum von:

Jahr	— Monat	— Tag
1833	7	6.

Verwandelt man nun beiläufig die 4325 Tage durch Division mit 365 in Jahre, so erhält man: 11 Jahre und 310 Tage. Diese Anzahl Tage zu Monaten von 30 Tagen gemacht, giebt: 310 Tage = 10 Monat und 10 Tage. Es enthalten aber in einem gemeinen Jahr von 365 Tagen die 10 ersten Monate:

365 — 30 + 31 = 365 — 61 = 304 Tage, anstatt wie angenommen wurde 300; daher ziehe man diese 4 Tage, welche die 10 Monate mehr brauchen, von 10 Tagen ab, so bleiben für 310 Tage noch 10 Monat und 6 Tage. Vorderhand addire man nun:

Jahr	— Monat	— Tag
1833	7	6
11	10	6
wird: 1845 J.	5 Mt.	12 Tg.

Von 1834 bis in das Jahr 1846 sind aber die Jahre 1836, 1840 und 1844 Schaltjahre, welche zu 366 Tagen gerechnet werden müssen, indem der Monat Februar in ihnen 29 Tage zählt, man hat daher zu den 11 Jahren 3 Tage zu wenig genommen, welche man nun von der Hauptsumme abziehen muß. Nach diesem bleibt: 1845 J. — 5 Monat und 9 Tag; und der letzte Tag dieses Zeitraums, welcher nach der Aufgabe zu wissen verlangt wird, ist:

„der 9. Juny des Jahrs 1846.“

§. 179.

Den Zirkel oder Kreis theilt man in 360 gleiche Theile, welche man Grade nennt.

Der 60te Theil eines Grades heißt Minute
= 60te = einer Minute = Sekunde
= 60te = = Sekunde = Tertie.

Es wird also hier von den Graden an die nämliche Theilung befolgt, wie bei der Zeit von den Stunden abwärts; auch gelten die gleichen Bezeichnungen, so daß 1° Einen Grad, 1′ eine Minute, 1″ eine Sekunde u. s. f. bedeutet.

In neuern Zeiten hört man bei den Sekunden mit der 60. Theilung auf, und wendet auf eine Sekunde das Dezimalsystem an, wodurch man für kleinere Werthe einen Dezimalbruch erhält, dessen ganze Zahl Sekunden bezeichnet; z. B.: 34″,68 drückt aus: 34 Sekunden, und $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{100}$ einer Sekunde.

Im Uebrigen gehen immer 60 Einheiten der geringern Werthe auf eine Einheit der nächst größern, woraus die nöthige Reduktion erfolgt.

1tes Beispiel, über die Summirung von Winkelmaaßen:

1)	30°	— 40′	— 55″,84
2)	58	— 29	— 36, 07
3)	108	— 18	— 43, 10
Summe =	197°	— 29′	— 15″,01

2tes Beispiel. Man addire:

1)	77°	— 48′	— 52″,33
2)	49	— 31	— 24, 10
3)	65	— 12	— 42, 91
4)	36	— 57	— 13, 05
5)	21	— 50	— 45, 58
6)	89	— 47	— 23, 19
7)	18	— 51	— 33, 84
Summe =	360	—300	5 240, 00 4
		300	240
		=	=

= 360° (ganzer Kreis-Umfang)

§. 180.

Aus den bis jetzt gegebenen Beispielen für die Addition benannter Zahlen mit verschiedenen Zahlensystemen, wird man sich nun auch das Verfahren ableiten können, welches bei einer Summirung angewendet werden muß, wenn den gegebenen Maaßwerthen eine ganz andere Eintheilung zu Grunde liegt; denn es kommt ja nur immer darauf an, zu wissen, wie viel Einheiten einer Gattung die Einheit der nächst höhern ausmachen, oder umgekehrt, um im Stande zu seyn, in allen die größtmögliche Zahl unter der Einheit der nächsten herzustellen. Darum glauben wir, jetzt ohne Bedenken zu der vermehrenden Rechnungsart durchs Multipliciren übergehen zu können; besonders, da wir uns vorgenommen, die gebräuchlichsten Maaßzahlen der Nachbarstaaten, welche auf unsern Verkehr Einfluß haben, in den nachfolgenden Rechnungsbeispielen zu geben. Natürlich erlaubt es der Plan dieses Werkes nicht, alle möglichen Maaßeintheilungen, die existiren, hier aufzunehmen; da mit demselben vielmehr nur beabsichtigt wird, die Berechnungsarten, durch welche man auf dem kürzesten Wege zu einem Resultate gelangt, auf eine einleuchtende Weise zu erklären. Es giebt besondere Werke, in denen alle zu unserer Kenntniß gekommenen Maaße mit ihren Verhältnissen zu einander aufgeführt sind.

In Rücksicht, daß die bisherigen Beispiele sämtlich auf die in Württemberg herrschenden Maaßeintheilungen bezogen werden können, wollen wir noch zum Schlusse dieses Abschnittes, als Ergänzung zu denselben, diejenigen kurz angeben, welche von ihnen abweichen und noch nicht genannt wurden; aber in jenem Lande üblich sind.

Papiermaaß.

Ballen.	Riß.	Buch.	Bogen.
1	10.	200	4800 Schreibpapier 5000 Druckpapier

Ballen.	Riß.	Buch.	Bogen.
	1	20	480 Schreibpapier 500 Druckpapier
		1	24 Schreibpapier 25 Druckpapier.

Kohlenmaaß.

Fuder.	Zuber.	Simri.
1	10	160
	1	16

Kalkmaaß.

1 Meß = 2 Simri.

Neueres Kalkmaaß.

Scheffel, Kufe. oder	Imi. Zuber.	Maas
1	= 4	= 40 Helleich

4 Zuber = 1 Eimer Helleich.

Strohmaaß.

1 Fuder = 80 Bund

(der Bund muß schwer seyn: 18 bis 20 ℔).

Heumaaß: entweder nach Gewicht 1 Centner = 5 Bund, 1 Bund = 21 ℔ mit Strohseil; oder nach dem Raummaaß:

Wanne	½ Wanne	¼ Wanne	⅛ Wanne.
1.	2.	4.	8.
8 Fuß lang	8 Fuß lang	8 Fuß lang	8 Fuß lang
8 = breit	8 = breit	8 = breit	8 = breit
8 = hoch	4 = hoch	2 = hoch	1 = hoch

Nach der Proportion der Güte des Heues kann die Wanne 9 bis 11 Centner wägen; gemeiniglich wird sie zu 1088 ℔ berechnet.

Eine Wanne gesessen Heu, soll für zwei gewöhnliche Wannen gelten. Wird das Heu noch vor der Erndte abgestochen, so nimmt man an, daß kaum mehr als 2 Wannen auf ursprüngliche 3 Wannen kommen.

Längenmaaß im Handel:

Elle.	$\frac{1}{2}$ Elle,	$\frac{1}{4}$ Elle,	$\frac{1}{16}$ Elle
1	2	4	16.

Längenmaaß für Faden:

1 Schneller = 1000 Fäden à 2 Ellen; und auch
$\frac{1}{2}$ = = 700 = à $1\frac{1}{2}$ Ellen.

Allgemeine Maaße:

Ein Schock = 60 Stück. Ein Orth = 15 kr.

Maaße des Mörtels oder Speißes:

1 Kübel Mört. = 4 Maaß, 1 Kasten Mört. = 24 Kübel;
1 Kasten Sand = 8 Kubikschuhe.

Die Holzwellen, auch Krehen genannt, sollen 4 Fuß lang und 1 Fuß dick seyn.

---

§. 181.

Vermehrende Rechnungsart mit benannten Zahlen.

b) Durch Multiplication.

Man multiplicirt, wie bei ganzen Zahlen, mit dem Multiplicator jede Ordnungszahl des Multiplicands besonders; indem man bei der niedersten anfängt, das erhaltene Produkt jedesmal, so weit es geht, auf Einheiten der nächst höhern Werthe bringt, solche zu dem nächsten Produkt zählt, und den gebliebenen Rest unter den Namen setzt, aus dessen vermehrter Zahl derselbe abgefallen ist.

Bei dieser Erklärung wird vorausgesetzt, daß die benannte Zahl, oder was immer mit ihr gleichbedeutend ist, der Maaßwerth einer bestimmten Größe in einem beliebigen Thei-

lungssysteme ausgedruckt, durch eine unbenannte Zahl, welche sonach dem Dezimalsystem angehört, vermehrt, d. h. so oft zu sich selbst addirt werden solle, als die Einheiten, Zehner, Hunderter u. s. w. des Multiplicators anzeigen.

1tes Beispiel. Es sollen

50 Ruthen — 9 Fuß — 10 Zoll und 11 Linien bairisches Längenmaaß, mit der Zahl 35 multiplicirt, d. h. die Maaßzahl gesucht werden, welche einer 35 mal größern Länge als die vorgegebene entspricht.

Eintheilung des bairischen Längenmaaßes.

Ruthe.	Fuß.	Zoll.	Linie.
1	10	120	1440
	1	12	144
		1	12

Man setze nun und multiplicire:

Multiplicand: 50° — 9′ — 10″ — 11‴

Multiplicator: 35

1750	315	350	12 | 385 | 32	
34	31	32	384	
1784	54,6	12 | 382 | 31		1
		372		
		= 10		

Produkt = 1784° 6′ 10″ 1‴ bair'isch.

Erklärung der Multiplication, welche zugleich für alle folgende Beispiele gelten kann.

Durch die Multiplication der verschiedenen Maaßzahlen mit 35, welche man an jeder besonders vornimmt und wie bei gewöhnlichen Zahlen ausführt, hat man erhalten:

1750° — 315′ — 350″ — 385‴. Man fange die Reduktion bei dem Produkte des kleinsten Maaßes, den Linien, an, von welchen 12 auf einen Zoll gehen. Es ist nun 12 in 385 — 32 mal ganz enthalten, oder 385 Linien enthalten 32 ganze Zolle;

denn: $32 \times 12 = 384$, welches Produkt von 385 abgezogen, einen Rest = 1 Linie läßt. Diesen Rest 1‴ setzt man unter die Rubrik der Linien und addirt die Zahl der gefundenen Zolle 32 zu dem Produkt 350, welches schon Zolle sind, wodurch man nun 382 Zolle in Rechnung hat. Da wieder 12 Zolle gleich einer Einheit der Fuße sind, so dividire man mit 12 in 382, was den Quotienten 31 giebt, der anzeigt, daß in 382 Zollen 31 ganze Fuße enthalten sind; denn $12 \times 31 = 372$. Letzteres Produkt von 382 Zoll abgezogen, bleibt ein Rest von 10 Zollen, deren Zahl 10″ man in der Spalte der Zolle bemerkt. Ferner zähle man die aus Zollen reduzirten 31 Fuße zu der Fußzahl 315, so bekommt man 346′; es sind aber 10′ = 1 Ruthe, daher mit 10 dividirt, was einfach dadurch geschieht, daß man im Dividend von der Rechten gegen die Linke eine Ziffer durch das Komma abschneidet, so erhält man 34 Ruthen zum Quotienten und 6 Schuh zum Rest. Erstern zu der vorhandenen Ruthenzahl addirt, und letztern unter seinen Gattungsnamen gesetzt, so ist die Reduktion vollendet; nämlich es enthält keine Maaßzahl einer niedern Ordnung den Werth der Einheit einer höhern in sich, und das Produkt ist auf die einfachste Zahl gebracht. Nach diesem ist in unsrem Beispiele das Produkt = 1784 Ruthen — 6 Fuß — 10 Zoll — 1 Linie geworden.

2tes Beispiel. Man solle von dem baier'schen Flächenmaaße = 17 Tagwerk (auch Morgen oder Jauchert genannt), 340 Ruthen, 75 Fuß und 123 Zollen, das 13fache suchen.

Eintheilung des bair'schen Flächenmaaßes.

Tagwerk. (Jauchert od. Morgen)	Ruthe. °□	Fuß. ′□	Zoll. ″□
1	400	40000	5760000
	1	100	14400
		1	144

Man ſetze und multiplicire:

17 Tagw. — 540°□ — 75′□ — 123″□

13

221			4420		975	144	1599	11
11			9		11		1584	
232	4	00	44	29	11	9,86		15

Produkt = 232 Tagwerk 29°□ 86′□ 15″□ bairiſch

3tes Beiſpiel: Im baieriſchen Fruchtmaaß ſeye gegeben: 5 Scheffel, 4 Metzen, 7 halbe Metzen, 30 Maſſel und 18 Dreißiger; man will die Summe der 3fachen dieſer Maaße wiſſen.

Eintheilung des baieriſchen Getraidemaaßes.

Scheffel.	Metzen.	Halbe Mtz.	Viert. Mtz.	Maſſel. (Achtel M.)	Halbe. Maſſel	Dreißiger.
1	6	12	24	48	96	192
	1	2	4	8	16	32
		1	2	4	8	16
			1	2	4	8
				1	2	4
					1	2

Man verwandle zunächſt, wo es möglich, die gegebenen Maaße in Einheiten höherer Ordnungen, und ſehe ſie zuſammen als ein Maaß an; worauf ſolches, wie ſonſt multiplicirt wird. Obige Maaße reduziren ſich auf:

Schfl.	Metzen.	½ M.	¼ M.	Maſſel.	½ Maſſel.
6	5	1	1	0	1
					3
18	15	3	3	0	3

Jedes Maaß dieſes Produkts wieder auf ſeine größten Einheiten gebracht, giebt:

„20 Schfl. 5¼ Metzen, 1½ Maſſel.“

4tes Beispiel. Die baierischen Gewichte:

1) 7 Zentner, 3 Stein und 25 Loth,
2) 2 = 16 Pfund = 14 Unzen,
3) 4 Stein 12 = = 2 Quent,
4) 20 Loth 3 Quent = 3 Pfennig

sollen 5 mal genommen werden; was macht das auf die verschiedenen Maaßtheile reduzirte Produkt?

Eintheilung des baierischen Gewichtes.

Zentner.	Stein.	Pfund.	Unzen.	Loth.	Quent.	Pfennig.
1	5	100	1600	3200	12800	51200
	1	20	320	640	2560	10240
		1	16	32	128	512
			1	2	8	32
				1	4	8
					1	4

Aufl. Zunächst addire und reduzire man die vier Gewichte:

	Ctr.	St.	℔	Unz.	Lt.	Qt.	Pf.
1)	7	3	—	—	25	—	—
2)	2	—	16	14	—	—	—
3)	—	4	12	—	—	2	—
4)	—	—	—	—	20	3	3
Summe =	10 Ctr.	3 St.	10 ℔	5 Unz. —		1 Qt.	3 Pf.

hierauf multiplicire man diese Summe mit 5

giebt =	50	15	50	25	—	5	15

und dieses Produkt reduzirt, erhält man:

„53 Zentner, 2 Stein, 11 Pfund, 9 Unzen, 2 Loth u. 3 Pfennig.“

5tes Beispiel. Man hat 7 gleiche Fässer, wovon eines nach baierischer Eich; 4 Schenk-Eimer, 48 Maas oder Kannen und 3 Quartel hält, wie viel beträgt der Gehalt aller Fässer?

Eintheilung des baierischen Schenkmaaßes.

Schenk-Eimer.	Maas od. Kanne.	Quartel.
1	60	240
	1	4
Aufl. 4 Emr.	48 Ms.	3 Qtl.
		7
28	336	4|21|5
5	5	|20|
33	60|341|5	= 1
	|300|	
	= 41	

Gesammt-Geh. = 33 Schenk-Eir. 41 Maas und 1 Quartel

Würde aber unter den Eimern der baierische Bier- oder Visir-Eimer verstanden seyn, so gilt folgende Eintheilung:

Faß-Bier,	Bier-Eimer,	Schenkmaaß.
1	25	1600
	1	64

und der Gesammt-Inhalt der 7 Fässer wäre:

„1 Faß-Bier, 8 Bier-Eimer, 21 Schenk-Maaß und 1 Quartel.“

§. 182.

Die vorstehenden Beispiele haben die vielfältige Addition irgend eines Maaßes zu sich selber vorgestellt; es kommt jedoch häufig vor, daß ein Maaß, so oft zu sich selber addirt, d. h. so viel mal und in dem Verhältnisse genommen werden soll, als die Theile eines andern gleichnamigen Maaßes anzeigen. Nämlich es kann gefordert werden, eine Länge, oder einen Flächengehalt oder dergleichen von einer gewissen Anzahl Ruthen, Schuhen, Zollen u. s. w., durch eine andere Länge im gleichen Maaßstabe ausgedruckt, zu multipliciren. Zwar wäre dieß ungereimt, wenn man unter dem Produkt wieder eine Länge oder eine Fläche verstehen wollte, es wäre denn, daß man die Bezeichnung nur gewählt hätte, um das Verhältniß des neuen Faktors zum Produkt anzugeben; denn

z. E. 5 Ruthen mal 7 Ruthen Länge kann nur Sinn haben, wenn 5 oder 7 eine Zahl bedeutet, die anzeigt, daß die Zahl der Ruthen so oft vermehrt werden müsse, als sie Einheiten hat, und dazu braucht es keiner weitern Benennung; aber durch das Produkt zweier Längenmaaße erfährt man in der praktischen Geometrie einen Flächen- oder Quadrat-Gehalt, so wie durch die Multiplication eines Flächenmaaßes mit einer Länge, den cubischen Inhalt eines Gegenstandes; daher diese Vermehrungsart näher in Betracht gezogen werden muß. — Es gilt, wie in der ganzen Arithmetik, auch hier der Grundsatz, daß nur Gleichartiges mit einander vereinigt oder verglichen werden kann; daß nämlich Längenmaaße oder dergleichen, die miteinander multiplicirt werden sollen, um einen Flächengehalt zu erzeugen, dem gleichen Eintheilungs- und Verbindungs-System eines und desselben Normalmaaßes angehören, und von gleicher Maaßgattung seyn müssen. Diesem gemäß wird man nur Maaße, entweder aus dem Duodezimal-, oder aus dem Dezimal-System und zwar wiederum nur Fuße und Fuße, Zolle und Zolle, Linien und Linien u. s. w. miteinander multipliciren können. Ist jedoch ein Längenmaaß in verschiedenen Maaßtheilen, z. B. 5 Schuh und 3 Zoll des Duodezimalsystems gegeben, und es soll mit einem andern von 4 Schuh multiplicirt werden, so bezeichnen nur 5 und 4 einerlei Maaßgattung und ihr Produkt ist $= 4 \times 5 = 20$ Quadratschuhe; aber 3 Zolle kann man nicht 4 Schuh mal nehmen, außer es werden diese vorher in Zolle verwandelt, was durch 12×4 geschieht, so daß nun Gleichartiges zu multipliciren ist. Wenn man daher die Brüche vermeiden will, so muß von zwei Faktoren immer derjenige, welcher die größern Maaßeinheiten enthält, in Theile des andern Faktors verwandelt werden. Bei Ausführung einer Multiplication in vorgegebenem Sinne setzt man die Maaßzahlen des Multiplicators unter die des Multiplicands so, daß die durch sie angedeuteten Maaßgattungen übereinander stehen und fängt dieselbe mit den höchsten Classen beider Faktoren an. Nach und nach muß

jede Maaßzahl des Multiplicands mit jeder des Multiplicators multiplicirt werden; hiebei wird, wie schon oben angedeutet worden, der größere Faktor eines Produkts (nämlich seinem Werthe nach), in Theile des kleinern aufgelöst. Das Produkt selbst, aus je zweien, auf gleiche Benennung gebrachten Faktoren, behält denselben Namen bei, nur wird das Maaß, welches seine Zahl ausdruckt, in einem andern Sinne verstanden.

Das angenommene Beispiel würde aufgelöst:

5′ — 3″
4′ —

20 — 4 . 12 . 3 = 20′□, 144″□

Nun weiß man, daß 144″□ der Duodeztheilung einen Quadratfuß machen, daher reduzirt sich das Produkt auf:

21′□

2tes Beispiel. Es sollen 5 Ruthen (16 schuhig) — 9′ — 5″ — 7‴ Duodezthl. Längenmaaß, mit 8′ — 4″ des nämlichen Maaßstabes multiplicirt werden.

Aufl. Man setze den Multiplicator so unter den Multiplicand, wie schon angegeben worden, und multiplicire nach und nach mit 8′ und hierauf mit 4″ des Multiplicators jede Maaßzahl des Multiplicands, und setze die gleichnamigen Produkte untereinander. Zur bessern Einsicht, wie die gleiche Benennung hergestellt wird, zwischen zwei Faktoren, ist solches in den Produkten durch Zusammensetzung der einzelnen Elemente nachgewiesen.

Multkand 5° — 9′ — 5″ — 7‴
Multptr. 8′ — 4″

Produkte durch 8′ = { 5 . 16 . 8 — 8 . 12 . 5 — 8 . 12 . 12 . 7
8 . 9

Produkte durch 4″ = ... 5 . 16 . 12 . 4 . . . . 4 . 12 . 7
9 . 12 . 4
4 . 5

Die erhaltenen Produkte bedeuten Quadratmaaße. Fängt

man nun die Reduktion bei der niederſten Claſſe, den Linien, an, ſo wird dieſelbe durch Diviſion mit 144 oder 12×12 verrichtet, um Quadratzolle zu erhalten. Man hat demnach:

$$\frac{8 \,.\, xz \,.\, xz \,.\, 7''\square}{xz \,.\, xz} + \frac{4 \,.\, xz \,.\, 7''\square}{xz \,.\, 12} = \left(56 + \frac{28}{12}\right)''\square =$$

$\left(58 + \frac{4}{12}\right)''\square = 58''\square + 48'''\square$. Hieraus erſieht man, daß $48'''\square$ für das vollſtändige Produkt abfallen; auch ergiebt ſich die Regel: „Wenn die Zahl der Fuße mit der Zahl der Linien (Längenmaaß) multiplicirt wird, ſo bedeutet das Produkt Quadratzolle; wird aber die Zahl der Zolle mit der Zahl der Linien multiplicirt, ſo muß das Produkt im Duodezimalſyſtem noch mit 12 dividirt werden, um die Anzahl der Quadratzolle zu geben, die es enthält. Der Reſt dieſer Diviſion kommt in die Stelle der Quadratlinien.“

Man gehe hierauf zur Reduktion der Zollſumme in Quadratfuße über. Außer den erhaltenen Produkten in der Multiplication beſteht nun dieſe Summe auch aus dem Quotienten 58, den man vorher aus den Linien gefunden hat; es iſt demnach:

$$\frac{8 \,.\, 12 \,.\, 5 + 5 \,.\, 16 \,.\, 12 \,.\, 4 + 9 \,.\, 12 \,.\, 4 + 4 \,.\, 5 + 58}{144} =$$

$\frac{4830}{144} = 33'\square + 78''\square$. Verfährt man nun mit den vorhandenen Produkten der Schuhe, zu welchen jetzt die ſo eben gefundenen $33'\square$ hingezählt werden, auf gleiche Weiſe, nur daß anſtatt wie bisher mit 144 dividirt wurde, die Zahl 256 zur Reduktion der Quadratſchuhe in 16ſchuhige Quadratruthen nöthig iſt, ſo ergiebt ſich:

$$\frac{5 \,.\, 16 \,.\, 8 + 8 \,.\, 9 + 33}{256} = \frac{745^{\circ}\square}{256} = 2^{\circ}\square + 233'\square$$

und das auf die kleinſte Form gebrachte Produkt $= 2^{\circ}\square + 233'\square + 78''\square + 48'''\square$ Duodez.M.

5tes Beiſpiel. Es wird gefordert: 30 (10ſchuhige) Ruthen, 10 Fuß, 11 Linien Duodez.Längenmaaß, mit 7 Ru-

then, 9 Zoll und 8 Linien der gleichen Eintheilung zu multipliciren, so ist die Auflösung folgende:

30°	10′	0″	11‴
7°	0′	9″	8‴

210	7.10.10	=	7.10.12.12.11	Produkte mit 7°
		9.30.10.12	9.11.12	Produkte mit 9″
		9.10.12		
			8.30.10.12.12	Produkte mit 8‴
			8.10.12.12	
			8.11	

Reduktion der Quadratlinien auf Quadratzolle:

$$\frac{7.10.\chi.\chi.11}{\chi.\chi} + \frac{8.30.10.\chi.\chi}{\chi.\chi} + \frac{8.10.\chi.\chi}{\chi.\chi} + \frac{9.11.12 + 8.11}{12.12} = 770 + 2400 + 80 + \frac{1276}{144} = 3258''\square + 124'''\square$$

Reduktion der Quadratzolle in Quadratfuße:

$$\frac{9.30.10.12 + 9.10.12 + 3258}{144} = 255'\square + 18''\square$$

Die Reduktion der Quadratfuße geschieht durch die Division mit der Zahl 100; denn eine 10schuhige Quadratruthe hat 100 Quadratfuß; dieselbe auszuführen darf man aber nur zwei Ziffer von der Rechten gegen die Linke abschneiden, so ist die vom Komma links stehende Zahl der ganze Quotient, und die zwei abgeschnittenen Ziffern bilden den Rest der Division, so daß also:

$7 . 10 . 10 + 255 = 955'\square = 9^\circ\square + 55'\square$; und hieraus die Ruthen zu dem vorhandenen Produkte der Ruthen genommen, erhält man das vollständige Produkt der beiden gegebenen Maaße in folgendem Ausdrucke:

„$219^\circ\square$ (10schuhig) $+ 55'\square + 18''\square + 124'''\square$ Duod.M.“

§. 183.

Da durch Multiplication eines Flächenmaaßes mit einem

Längenmaaße, welchem das nämliche Theilungssystem und Normalmaaß zu Grunde liegt, ein Körper- oder Kubikmaaß entsteht, so muß bei der Erzeugung dieses Produkts wohl Acht gegeben werden, ob eine Flächen- oder eine Längenmaaßzahl in die Einheiten einer kleinern Gattung verwandelt werden soll, indem solche sehr von einander unterschieden sind; denn z. B. um einen Quadratfuß der Duodeztheilung in Quadratzolle zu verwandeln, muß man selbigen mit 144 multipliciren, während die Verwandlung eines Längenfußes in Längenzolle der nämlichen Theilung durch die Multiplication mit 12 geschieht.

1tes Beispiel. Es soll 5′□, 10″□ mit 6′ Längenmaaß, beides im Duodezimalsystem, multiplicirt werden; welcher Kubikgehalt wird durch diese Multiplication erzeugt?

Auflösung. Man setze wie vorhin die gleichlautenden Maaßzahlen untereinander, und multiplicire in der nämlichen Ordnung, indem man, wie bemerkt worden, die nöthigen Verwandlungen nach der Beschaffenheit der Maaße vornimmt; also:

5′□ 10″□
6′

18′Cq. 6 . 12 . 10″Cq. = 18′Cq + 720″Cq.

Man weiß, daß 1728 Duodezkubikzolle auf einen Kubikfuß gehen, daher steckt in 720″Cq. kein ganzer Fuß und das gefundene Produkt erleidet keine Veränderung.

2tes Beispiel. Es ist das duodeztheilige Flächenmaaß von 8□ Klafter, 24′□, 116″□, 120‴□ gegeben, mit der Bedingung, solches mit dem Duodez-Längenmaaße von 5′, 9″, 7‴ zu multipliciren.

Auflösung. Eine Quadratklafter hat 36 Quadratfuß, also:

8□Kl., 24′□, 116″□, 120‴□
5′ 9″ 7‴

Produkte mit 5′ = 5 . 8 . 36, 5 . 12 . 116, 5 . 12 . 12 . 120, 5 . 24.

Produkte mit $9''' = 9.8.36.144'' - 9.12.120'''$
$9.24.144$
9.116

Produkte mit $7''' = \ldots\ldots\ldots\ldots 7.8.36.144.144$
$7.24.144.144$
$7.116.144$
7.120

Verwandlung der Kubiklinien in Kubikzolle, welche durch die Diviſion mit 1728 oder 144.12 geſchieht:

$$\frac{5.\chi\chi.\chi\chi.\chi\chi\varnothing}{\chi\chi\chi.\chi\chi} + \frac{9.\chi\chi.120}{144.\chi\chi} + \frac{7.8.36.\chi\chi\chi.\chi\chi\chi}{\chi\chi\chi.\chi\chi} +$$
$$+ \frac{7.24.\chi\chi\chi.\chi\chi\chi}{\chi\chi\chi.\chi\chi} + \frac{7.116.\chi\chi\chi}{144.\chi\chi} + \frac{7.\chi\chi\varnothing}{144.\chi\chi} =$$
$$5{,}10 + \frac{9.120}{144} + 7.8.36.12 + 7.24.12 + \frac{7.116.12}{144} + \frac{7.10}{144} =$$
$$= 50 + 24192 + 2016 + \frac{1080 + 9744 + 70}{144} =$$
$$= 26258 + \frac{10894}{144} = 26258 + 75\frac{94}{144} =$$
$$= 26333'''^{Cq.} + 1128'''^{Cq.}$$

Die Reduktion der Kubikzolle auf Kubikfuße geſchieht ebenfalls durch Diviſion mit 1728 oder 144.12, demnach:

$$\frac{5.12.116}{144.12} + \frac{9.8.\chi\varnothing.\chi\chi\chi}{\chi\chi\chi.\chi\chi} + \frac{9.\chi\chi.\chi\chi\chi}{\chi\chi\chi.\chi\chi} + \frac{9.116}{144.12} +$$
$$+ \frac{26333}{144.12} = \frac{5.12.116}{1728} + 9.8.5 + 9.2 + \frac{9.116 + 26333}{1728} =$$
$$= 216 + 18 + \frac{580 + 1044 + 26333}{1728} = 234 + \frac{27957}{1728} =$$
$$= 234 + 16\frac{309}{1728} = 250'^{Cq.} + 309'''^{Cq.}$$

Durch Diviſion der Kubikfuße mit $36 \times 6 = 216$ wird die Reduktion derſelben in Kubikklafter bewerkſtelligt, daher:

$$\frac{5.8.36}{36.6} + \frac{5.24}{36.6} + \frac{250}{36.6} = \frac{1440 + 120 + 250}{216} = \frac{1810}{216} =$$

$= 8^{Cq.}$ Klafter $+ 82^{'Cq.}$ und sonach das vollständige Produkt $=$

$8^{Cq.}$ Klafter $+ 82^{'Cq.} + 309^{''Cq.} + 1128^{'''Cq.}$

§. 184.

Bei der Multiplication zweier Maaße könnte man auch so verfahren: man verwandle sowohl in dem Multiplicand als Multiplicator jede Maaßzahl in die Theile der kleinsten gleichlautenden Gattung, nehme von den zwei Summen das Produkt und entwickle aus diesem durch allmählige Divisionen die Werthe der neuen Maaßgattungen. Bei dieser Verfahrungsart hat man aber mit so großen Zahlen zu schaffen, daß nicht nur die Auflösung langwieriger, sondern auch zu gleicher Zeit unsicherer ist; daher das bisher Gezeigte wohl immer vorzuziehen wäre. Von der Wahrheit dieser Behauptung mag man sich durch folgendes Beispiel überzeugen:

Es seye das Duodezflächenmaaß $= 5'\square$, $8''\square$, $7'''\square$ mit dem Duodezlängenmaaße $= 9'$, $10''$ zu multipliciren. Die kleinste Maaßgattung kommt in dem Flächengehalte unter dem Titel Linien vor; man verwandle nun sowohl das Flächenmaaß in Quadrat-, als das Längenmaaß in Längenlinien, woraus man erhält:

$5'\square + 8''\square + 7'''\square = 5.144.144 + 8.144 + 7 = 104839'''\square$

$9' + 10'' \quad 9 . 12 + 10 . 12 = 1416'''$

Es ist aber $104839 \times 1416 = 148452024^{'''Cq.}$. Dieses Produkt durch Division mit 1728 in Kubikzolle verwandelt, giebt $= 85909^{''Cq.} + 1272^{'''Cq.}$ Durch die Reduktion der gefundenen Kubikzolle auf Kubikfuße bekommt man: $85909^{''Cq.} = 49^{'Cq.} + 1257^{''Cq.}$ und daher die vollständige Darstellung der Multiplication in den größten Maaßeinheiten $= 49^{Cq.} + 1257^{''Cq.} + 1272^{'''Cq.}$ Den gleichen Ausdruck hätte man nach dem vorigen Verfahren auf einem bequemern Weg erhalten; denn nach solchem wäre:

$5'\square$	$8''\square$	$7'''\square$
$9'$	$10''$	
45	9.12.8	9.12.12.7
	10.5.144	10.12.7
	10.8	

1) $\frac{(9.12.12.7+10.12.7)'''_{Cq.}}{1728} = \frac{9912'''_{Cq.}}{1728} = 5''^{Cq.} + 1272'''^{Cq.}$

2) $\frac{(9.12.8+5.144.10+8.10+5)}{1728} = \frac{8149''^{Cq.}}{1728} = 4'^{Cq.} + 1237''^{Cq.}$

3) $45'^{Cq.} + 4'^{Cq.} = 49'^{Cq.}$; also dieses Maaß mit den gebliebenen Resten;

$= 49'^{Cq.}, 1237''^{Cq.}, 1272'''^{Cq.}$, wie vorhin.

Wir wollen nun auch Aufgaben der Dezimaleintheilung auflösen, aus denen man ersehen kann, daß die Werthe in diesem Systeme ausgedruckt, sehr leicht miteinander zu multipliciren sind.

Man wird sich erinnern, daß sowohl Längen-, als Flächen-, als Körpermaaße des Dezimalsystems in der Form von Dezimalbrüchen, welche die größte Maaßgattung in der die Zehntheilung beginnt, zur ganzen Zahl haben, geschrieben werden können; so daß also bei 10schuhigen Längenruthen die Ruthenzahl, und bei größern oder kleinern Ruthen die Zahl der Fuße, oder je nach Umständen, überhaupt die Zahl des größten Maaßwerthes innerhalb des Dezimalsystems, zur ganzen Größe genommen wird. Die nämliche Rücksicht findet bei Flächen- und Körpermaaßen Statt. Wenn daher zwei gleichartige Maaße des Dezimalsystems gegeben und solche auf gleichlautende Benennung gebracht sind, so kann man sie wie gewöhnliche Dezimalbrüche multipliciren und dem Produkt den Namen desjenigen Grundmaaßes beilegen, welchem seine Erzeugung entspricht; d. h. Längenmaaß mit Längenmaaß giebt Flächenmaaß, dessen Einheit entweder der Quadratfuß oder die Quadratruthe ist und Längenmaaß mit Flächenmaaß giebt Körper- oder Kubikmaaß, welchem entweder die Kubikklafter, oder der Kubikfuß zu Grunde liegt.

1tes Beispiel. Es seyen die Längenmaaße des Dezimalsystems 1) 6′, 8″, 7‴ und 2) 14′, 5″, 3‴ miteinander zu multipliciren und aus dem Produkt die einzelnen Quadratmaaße auszuscheiden, so verfahre man:

1) 6′,87
2) 14,53

2061
5435
2748
687

99,82 11 = 99′□, 82″□, 11‴□

Behandelt man die Auflösung nach Art der §. 182, Nro. 2 gezeigten Methode, so wird sich die Richtigkeit des einen Verfahrens durch das andere erproben:

6′	8″	7‴
14′	5″	3‴
84	14.10.8	14.10.10.7
	5.6.10	5.10.7
	5.8	5.6.10.10
		3.8.10
		3.7

Reduktion der Quadratlinien auf Quadratzolle, wobei 1 Quadratzoll = 10 . 10 = 100 Quadratlinien.

$$\frac{14.x\emptyset.x\emptyset.7}{x\emptyset.x\emptyset} + \frac{5.x\emptyset.7}{x\emptyset.10} + \frac{3.6.x\emptyset.x\emptyset}{x\emptyset.x\emptyset} + \frac{3.8.x\emptyset}{10.x\emptyset} + \frac{3\,7}{10.10}$$

$$= 98 + 3{,}5 + 18 + 2{,}4 + 0{,}21 = 122''\square{,}11''' =$$

$$= 122''\square + 11'''\square.$$

Reduktion der Quadratzolle auf Quadratlinien:

$$\frac{14.x\emptyset.8}{x\emptyset.10} + \frac{5.6.x\emptyset}{x\emptyset.10} + \frac{5.8}{10.10} + \frac{122}{10.10} =$$

$$= 11{,}2 + 3{,}0 + 0{,}40 + 1{,}22 = 15'\square{,}82 = 15'\square + 82''\square$$

Addirt man hiezu das Produkt der ganzen Quadrat-

fuße 84 und den vorigen Rest der Linien 11, so hat man den vollständigen Werth des Flächengehalts, welcher aus der Multiplication erzeugt worden ist, in folgendem Ausdrucke:

$99'\square, 82''\square, 11'''\square$, wie vorhin.

2tes Beispiel. Das Detail-Aufnahms-Blatt, oder eine Flur-Charte der württembergischen Landesvermessung, enthält die Fläche, welche ein Quadrat umschließt, dessen Seite = 4000 württembergische Fußen ist; man soll das Maaß dieses Flächengehalts in württembergischen Morgen, 10schuhigen Quadratruthen, und wenn noch ein Rest bleiben sollte, in den übrigen Maaßtheilen der Dezimaleintheilung angeben.

Auflösung:

$$\begin{array}{r} 4000 \\ 4000 \\ \hline 16000000 \end{array}$$

das Produkt ist der Flächengehalt in Quadratfußen. Da nun eine 10theilige Quadratruthe = $100'\square$ enthält, so sind $16000000'\square = 160000$ Quadratruthen. Solcher Ruthen gehen aber 384 auf einen Württemberger-Morgen, daher mit dieser Zahl dividirt, erhält man:

$\frac{160000}{384} = 416$ Morgen $+ 256°\square = 416\frac{2}{3}$ Morgen.

Will man, wie es üblich, die halben, viertels, achtels u. s. w. Morgen aus der Anzahl der Quadratruthen scheiden, so ziehe man nach und nach die Werthe derselben, wie wir sie schon früher angegeben haben §. 173., von solcher ab.

Diesem nach wäre der Flächengehalt eines Aufnahms-Blattes der württembergischen Landesvermessung in landesüblichem 10theiligem Maaße =
416 Morgen $-\frac{1}{3}$ Mrg. $-\frac{1}{8}$ Mrg. — 16 Q.Rth. (10schuhig), oder = $416\frac{5}{8}$ Morgen und 16 Q.Rth. (10schuhig).

Wäre gefordert worden, den Theil der besagten Fläche, welcher den Gehalt eines ganzen Morgen nicht erreicht, zunächst in 16theiligen Quadratruthen, Reste nach diesen aber wie vorhin anzugeben, und hierauf wieder die halben, viertels u. s. w. Morgen zu suchen, so hat man für letztern Zweck folgende Werthe:

1 Morgen = 150 Q.Rth. (16theilig) = 38400′□
$\frac{1}{2}$ " = 75 " " = 19200 "
$\frac{1}{4}$ " = $37\frac{1}{2}$ " " = 9600 "
$\frac{1}{8}$ " = $18\frac{3}{4}$ " " = 4800 "
$\frac{1}{16}$ " = $9\frac{3}{8}$ " " = 2400 "
1 Quadratruthe (16theilig) . . . . . = 256 "

und da die Größe des Morgens hier die nämliche wie vorhin bleibt §. 173., so geschieht die Verwandlung des Restes von 25600 Quadratfußen in 16theilige Quadratruthen durch:

$\frac{25600}{256} = 100$ Ruthen, soviel als $\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$ Morgen.

Nun ist:

100 (16thl.) Q.Rth. $= \frac{1}{2}$ Mrg. $+ \frac{1}{8}$ M. $+ 6$ Q.Rth. $+ 64$ Q.F.,

also die Fläche eines Blattes bei 16thl. Ruthen,

entweder = 416 Mrg. u. 100 Q.Ruthen, oder

$= 416\frac{5}{8}$ Mrg. + 6 Q.Ruthen u. 64 Q.Fuß.

3tes Beispiel. Es ist eine Masse Scheiterholz in einer geraden Linie von 1416′ und in der gleichen Höhe von 10′, 8″, 6‴ württembergisches Dezimalmeß aufgeschichtet; jedes Scheit hat $5\frac{1}{2}$ Fuß Länge des nämlichen Maaßes: man verlangt die Anzahl württembergischer Holzklafter zu wissen, welcher genannte Holzmasse gleich ist.

Auflösung. Die württembergische Holzklafter hat gesetzlich 36′□ × 4′ = 144′Cq. Inhalt, und die gegebene Holzmasse enthält:

1416 × 10,86 × 5,5 = 84577,68 Kubikfuß;

setzt man nun einstweilen die Anzahl der gesuchten Klafter = x, so muß:

144′Cq. . x = 84577,Cq.68 seyn; demnach

$$x = \frac{84577,68}{144} = 587 \text{ Klafter und } 49'^{Cq},68.$$

oder = 587 Kl. — $\frac{1}{4}$ Kl. — $\frac{1}{16}$ Kl. — 4′Cq.,68; oder

= $587\frac{1}{4}$ Klafter — 1 Ecklen — 4′Cq. und 680″Cq. Holzmeß.

4tes Beispiel. Die beiden Längenmaaße:

1) 15 Ruthen — 7 Fuß — 9 Zoll und 2) 20 Ruthen —

8 Fuß und 6 Zoll sind miteinander zu multipliciren; dieselben gehören sammt den Ruthen dem Dezimalsystem an.

Auflösung. Solche kann auf zweierlei Art geschehen, wie hier folgt:

entweder:		oder:	
1)	15°,79		15°, 79
	20 ,86		20 , 86
	94 74		315 , 8
	1263 2		12 , 632
	3158		9474
	329°□,3794		329°□,3794

= 329 Q.Rth. — 37 Q.Schuh und 94 Q.Zoll.

= 329°□ — 37′□ — 94″□

5tes Beispiel. Das Flächenmaaß: 120 Q.Ruthen, 88 Q.Fuß und 56 Q.Zoll, mit der Länge: 17 Ruthen, 9 Fuß, 6 Zoll und 5 Linien, beide Maaße durchaus zehntheilig, zu multipliciren,

Auflösung. Durch die Multiplication dieser Maaße erhält man einen Kubikgehalt, dessen höchster Maaßtheil Kubikruthen sind, deren jede = 1000 Kubikfuß ist. Will man aber die im Produkte enthaltenen Kubikklafter, deren jede = 216 Kubikfuß Werth hat, auf die herkömmliche Weise darstellen, so hat man nichts zu thun, als die Zahl der Kubikruthen in Kubikfuße zu verwandeln, die vorhandene Summe der Kubikfuße dazu addiren, und durch Division mit 216 in die erhaltene Anzahl die Menge der Kubikklafter suchen. Die Ausführung des Kalkuls ist:

	120°□,8856
	17 ,965
	6044280
	7255136
	10879704
	8461992
	1208856
	2171°Cq.,7098040 = 2171°Cq., 709′Cq., 804″Cq.

d. h. = 2171 Kubikruthen, 709 Kubikfuß, 804 Kubikzoll.

Oder man verrichte die Multiplication umgekehrt, indem man selbige mit der höchsten Ziffer des Multiplicators beginnt, wobei immer die gleichen Ordnungszahlen untereinander kommen:

$$\begin{array}{r} 120{,}8856 \\ 17{,}965 \\ \hline 1208{,}856 \\ 846{,}1992 \\ 108{,}79704 \\ 7{,}253136 \\ 6044280 \\ \hline \end{array}$$

$2171^{\circ Cq.}{,}709804 = 2171^{\circ Cq.}, 709^{'Cq.}, 804^{''Cq.}$

Diesen kubischen Gehalt, statt in Ruthen, nun in Klafter ausgedruckt, erhält man:

2171 Kubikruthen = 2171000 Kubikfuß,
hiezu addirt 709

2171709 Kubikfuß, und

$\frac{2171709}{216}$ = 10054 Kubikklafter und 45 Kubikfuß.

Daher der vollständige Gehalt:
10054 K.Kl., $45^{'Cq.}{,}804$ =
$10054^{\circ Cq.}, 45^{'Cq.}, 804^{''Cq.}$

6tes Beispiel. Zu einem Wasserbehälter wird ein Stück Boden ausgegraben, in folgenden Dimensionen: Länge = 5836′, 6″, Breite = 715′, 3″, Tiefe = 15′, 8″, 4‴ Dezimalmaaß; man soll den körperlichen Raum dieses Behälters in Kubikklafter u. s. w., so wie die Anzahl der Eimer, Imi u. s. f. im württembergischen Flüßigkeitsmaaße, welche er zu fassen im Stande ist, angeben.

Auflösung. Der kubische Inhalt des Behälters ist = $5836'{,}6 \times 715'{,}3 \times 15'{,}84 = 66130732^{'Cq.}{,}4832$.

Diese Summe von Kubikfußen mit 216 in Kubikklafter verwandelt, erhält man:

30616 Kubikklafter und $172{,}_{4832}$ Kubikfuß =
$30616^{\text{Cq.}}$, $172^{\prime\text{Cq.}}$, $483^{\prime\prime\text{Cq.}}$, $200^{\prime\prime\prime\text{Cq.}}$.

Eine Eichmaas in Württemberg muß einem Raume von $78\frac{1}{8}$ Dezimalkubikzoll gleich seyn, was in einem Dezimalbruch ausgedruckt $= 78^{\prime\prime\text{Cq.}},_{125}$ ist. Verwandelt man nun die Summe der Kubikfuße vorerst in württembergische Eichmaaße durch:

0,078125 | 66130732,483200 | 846473375 Maas
625000.....

= 365073
312500

= 505732
468750

= 369824
312500

= 573248
546875

= 263733
234375

= 592070
546875

= 451950
390625

= 61325 Maas Rest.
4 Schoppen.

den Rest mit 4 zu Schoppen gemacht

245300 | 3 + $\frac{10925}{78125}$ = $3\frac{1}{7}$ Schopp.
234375 |

= 10925

so erhält man: 846473375 Maas und $3\frac{1}{7}$ Schoppen.

Diese Maassumme durch Division mit 10 zu Imi gemacht, giebt: 84647337 Imi, 5 Maas, $3\frac{1}{7}$ Schoppen. Nun hat ein Eimer 16 Imi, daher auf solche reduzirt: 5290458 Eimer, 9 Imi, 5 Ms., $3\frac{1}{7}$ Schoppen. Die Einheit des größten Werthes beim Flüßigkeitsmaaß ist in Württemberg 1 Fuder = 6 Eimer; wendet man hier dieses Maaß auch an, so ist der Gehalt des Behälters = 881743 Fuder, 9 Imi, 5 Ms., $3\frac{1}{7}$ Schoppen (württembergisch).

Nach dem Vorigen kann man folgende Zusammen-

stellung der in Württemberg eingeführten Flüßigkeitsmaaße mit ihren kubischen Inhalten machen, indem man letztern den zehntheiligen württembergischen Kubikfuß zu Grunde legt:

1 Schoppen = $19781'''^{Cq.} = 19''^{Cq.},_{781} = 19''^{Cq.} + 781'''^{Cq.}$
1 Maas = $78125'''^{Cq.} = 78''^{Cq.},_{125} = 78''^{Cq.} + 125'''^{Cq.}$
1 Imi = $781250'''^{Cq.} = 781''^{Cq.},_{25} = 781''^{Cq.} + 250'''^{Cq.}$
1 Eimer = $12500000'''^{Cq.} = 12500''^{Cq.} = 12'^{Cq.} + 500''^{Cq.}$
1 Fuder = $75000000'''^{Cq.} = 75000''^{Cq.} = 75'^{Cq.}$

7tes Beispiel. Ein Fruchtkasten, welcher 324′, 7″ Dez. lang und 36′, 8″, 6‴ Dez. breit ist, wird in einer gleichen Höhe von 9″, 3‴ gefüllt, wie viel württemberg. Scheffel, Simri u. s. w. hat man hiezu nöthig?

Auflösung. Das Grundmaaß für's Getreide ist in Württemberg das Simri, und muß solches $942\frac{1}{8}$ württemb. Dezimalkubikzolle enthalten, was in einem Dezimalbruch ausgedruckt = $942''^{Cq.},_{125}$ ist; daher sind die Werthe der übrigen Maaßtheile folgende:

1 Scheffel = $7557000'''^{Cq.} = 7557''^{Cq.} = 7'^{Cq.} + 537''^{Cq.}$
1 Simri = $942125''' = 942'',_{125} = 942'' + 125'''$.
1 Vierlg. = $235551'''^{Cq.} = 235''^{Cq.},_{531} = 235''^{Cq.} + 531'''^{Cq.}$
1 Ecklen = $29441''',_{4} = 29'',_{4414} = 29'' + 441''',_{4}$
1 Viertln. = $7360''',_{3} = 7'',_{3603} = 7'' + 360''',_{3}$

Berechnet man den kubischen Inhalt der aufgeschütteten Frucht nach den gegebenen Maaßen, so hat man:

$$324,_{7} \times 36,_{86} \times 0,_{93} = 11968'\square,_{442} \times 0,_{93} =$$
$$11130''^{Cq.},_{65106} = 11130''^{Cq.} + 651''^{Cq.} + 60'''^{Cq.}$$

oder = $11130651''^{Cq.} + 60'''^{Cq.}$ für das gesuchte Kubikmeß.

Vergleicht man die Anzahl der Kubikzolle in letzterem Werthe mit dem Inhalt eines Scheffels in der nämlichen Maaßgattung, so wird man sogleich einsehen, daß dieser mehreremal in derselben enthalten ist; deßhalb dividire man:

1 Scheffel = 7537 | 11150651 | 1476 Scheffel
7537 | | |
= 35936
30148
= 57885
52759
= 51261
45222
= 6039 Rest in Zollen.

Zu diesem Rest den Rest $60'''^{Cq.}$ des Hauptwerths addirt und die Summe zu Simri gemacht:

942125 | 6039060 | 6 Simri
5652750 |
= 386310 Rest in Linien.

Aus letzterem Rest die Vierling gesucht:

235531 | 386310 | 1 Vierling.
235531 |
150779 Rest in Linien.

Nun die Ecklen:

294414 | 1507790 | 5 Ecklen
1472070 |
= 35720 Rest in Linien.

Endlich die Viertelen ausgeschieden:

$\frac{35720}{73605} = \frac{1}{2}$ Viertelen mehr dem Rest $= 216'''^{Cq.}{}_{,3}$.

Setzt man nun die erhaltenen Quotienten in eine Summe zusammen, so hat man den Werth des aufgeschütteten Getreides nach württemb. Fruchtmaaß =

„1476 Scheffel + 6 Simri + 1 Vierling + 5 Ecklen
„+ $\frac{1}{2}$ Viertelen + 216,3 Kubiklinien.“

8tes Beispiel. Eine Länge von $5837\frac{1}{4}$ württemb. Ellen solle in württemb. Dezimalfußen angegeben werden.

Auflösung. In Württemberg ist die Elle im landesüblichen Dezimalfußmaaße $= 214''',4 = 2', 1'', 4''', 4^{VI.}$ oder

$= 2',_{144}$. Multiplicirt man diesen Werth der Elle mit obiger Anzahl $5837\frac{3}{4} = 5837,_{75}$ Ellen, so erhält man für solche ebenfalls den Werth in württemb. Fußen, wie verlangt wurde; demnach:

5837,75	5837,75
2,144	2,144
2335100	11675,50..
2335100	583,775.
583775	233,5100.
1167550	23,35100.
12516,136000 Fuß.	12516,13600 Fuß;

oder auch = 1251 Dez.Ruthen und $6',_{136}$.
= = = 2086 Klafter = $0',_{136}$.

§. 185.

Käme der Fall vor, der jedoch nicht leicht denkbar ist, daß z. E. ein zwölftheiliges Maaß oder irgend ein anderes mit einer ebensoviel theiligen Zahl multiplicirt werden solle, ohne daß sich die Beschaffenheit des Maaßes in dem Produkte ändere, so gründet sich die Ausführung der Multiplication auf folgende Betrachtung:

Es seye das zwölftheilige Maaß $= 9', 4'', 5''', 7^{IV}$. gegeben, so kann man diese verschiedenen Maaßtheile als Ordnungen ihres Grundmaaßes, welches hier der Fuß ist, ansehen, welche so miteinander zusammenhängen, daß immer eine Einheit der höhern Ordnung 12 Einheiten der nächst kleinern ausmachen, oder eine Einheit der kleinern der zwölfte Theil von der Einheit der nächst vorhergehenden Ordnung ist.

Nimmt man nun:

1 Fuß $= 1'$ für die 1te Ordnung
1 Zoll $= \frac{1'}{12}$ = = 2te =
1 Linie $= \frac{1'}{12.12}$ = = 3te =

$1^{IV.} = \frac{1'}{12 \cdot 12 \cdot 12}$ für die 4te Ordnung

$1^{V} = \frac{1'}{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12}$ " = 5te "

$1^{VI} = \frac{1'}{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12}$ " = 6te "

u. s. w. u. s. w. Ordnung an,

und stellt sich vor, das angenommene Maaß solle mit einer Zahl = 6′, 8″, 5‴, 9^{IV} multiplicirt werden, deren Theile sich auf das gleiche Ordnungssystem gründen, und welche man deßwegen auch auf die nämliche Art bezeichnet; in dem Produkt verlangt man aber kein Quadratmaaß, sondern eine Vermehrung der gegebenen Länge, um soviel mal des Werthes, als der zwölftheilige Multiplicator in Beziehung auf die Einheitszahl, anzeigt, so verfahre man auf nachstehende Art:

Ordnung:	1	2	3	4	5	6
	9′	4″	5‴	7^{IV}		
	6	8	5	9		

Multiplicator 6′

$6 \times 9 = 54$ in die 1te Ordnung gehörig

$6 \times \frac{4}{12} = \frac{24}{12}$ " 2te " "

$6 \times \frac{5}{12.12} = \frac{30}{12.12}$ 3te " "

$6 \times \frac{7}{12.12.12} = \frac{42}{12.12.12}$ 4te " "

Multiplicator 8″ $1'' = \frac{1'}{12}$

$\frac{8}{12} \times 9 = \frac{72}{12}$ 2te " "

$\frac{8}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{32}{12.12}$ 3te " "

$\frac{8}{12} \times \frac{5}{12.12} = \frac{40}{12.12.12}$ 4te " "

$\frac{8}{12} \times \frac{7}{12.12.12} = \frac{56}{12.12.12.12}$ 5te " "

Multiplicator $1''' = \frac{5'''}{\frac{1'}{12.12}}$

$\frac{5}{12.12} \times 9 = \frac{45}{12.12}$ in die 3te Ordn. gehör.

$\frac{5}{12.12} \times \frac{4}{12} = \frac{20}{12.12.12}$ = 4te = =

$\frac{5}{12.12} \times \frac{5}{12.12} = \frac{25}{12.12.12.12}$ 5te = =

$\frac{5}{12.12} \times \frac{7}{12.12.12} = \frac{35}{12.12.12.12.12}$ 6te = =

Multiplicator $1^{IV} = \frac{9^{IV}.}{\frac{1'}{12.12.12}}$

$\frac{9}{12.12.12} \times 9 = \frac{81}{12.12.12}$ 4te = =

$\frac{9}{12.12.12} \times \frac{4}{12} = \frac{36}{12.12.12.12}$ 5te = =

$\frac{9}{12.12.12} \times \frac{7}{12.12} = \frac{63}{12.12.12.12.12.}$ 6te = =

$\frac{9}{12.12.12} \times \frac{7}{12.12} = \frac{63}{12.12.12.12.21.12}$ 7te = =

Nun setze man die Produkte, welche der gleichen Ordnung angehören, untereinander, wobei man natürlich die Nenner wegläßt, weil solche schon in der Reihenfolge enthalten sind, summire die Zähler von der niedersten Ordnung an, reduzire jede Summe auf die Einheiten der nächst höhern mittelst Division durch 12 und zähle solche den betreffenden Maaßtheilen bei, so hat man:

Ordnung:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
	54′	24″	30‴	42^{IV}			
		72	32	40	56^{V}		
			45	20	25	35^{VI}	
				81	36	45	63^{VII}
	62	11	3	1	4	1	3

Das Längenprodukt des 12theiligen Maaßes ist demnach = 62′, 11″, 3‴, 1^{IV}, 4^{V}, 1^{VI}, 3^{VII}.

Wollte man solches, wie es gewöhnlich ist, von der dritten Ordnung oder den Linien an, in Dezimaltheilen einer Linie ausdrucken, so wäre:

$$62' + 11'' + 3''' + \frac{1'''}{12} + \frac{4'''}{12.12} + \frac{1'''}{12.12.12} + \frac{5'''}{12.12.12.12} =$$

$$62' + 11'' + 3''' + \frac{1.12.12.12 + 12.12.4 + 1.12 + 5}{12.12.12.12} =$$

$$62' + 11'' + 3''' + \frac{2319'''}{20736} = 62' + 11'' + 3''' + 0''',11183\ldots$$

und endlich:

$$= 62' + 11'' + 3''',_{11183} \ldots\ldots$$

§. 186.

Aus dem so eben gegebenen Beispiele kann man für die Multiplication einer Größe, der ein beliebig getheilter Maaßstab zu Grunde liegt, mit einer Zahl der nämlichen Eintheilung die Regel ableiten:

„Man setze die Maaßzahlen des Multiplicators so unter „die des Multiplicands, daß die gleichen Ordnungen von ihren Grundeinheiten an, übereinanderstehen, beginne die Multiplication mit der höchsten Maaßzahl des Multiplicands „durch die höchste des Multiplicators und setze je das erste „Produkt in die niederste Ordnung dieser beiden Faktoren. „Im Uebrigen beobachte man das gleiche Verfahren wie vorhin."

Es soll z. B. das Maaß eines Kreisbogens = 56°, 44′ 35″ der Sexagesimaltheilung mit einer Zahl, deren Ordnungssystem ebenfalls 60theilig ist, d. h. bei welcher die Grundeinheit, oder die Einheit der ersten Ordnung 60 Einheiten der zweiten u. s. w. enthält und die = 12°, 25′, 55″, 7‴ seye, multiplicirt werden, so ist:

Ordnung:	1	2	3	4	5	6	
	56°	44′	35″	=	=	=	
	12	25	55	7‴	=	=	
Pdkt mit 12 =	112	528	420				
= = 25 =		1400	1100	875			Jede Summe m. 60 dividirt
= = 55 =			3080	2420	1925^{IV}		
				392	308	245^{V}	
Summe =	145	25	42	4	47	5	

§. 187.

Vermindernde Rechnungsart mit benannten Zahlen.

a) Durch Subtraction.

Solche wird auf die gleiche Art, wie die Subtraction der unbenannten Zahlen behandelt, mit dem einzigen Unterschied, daß man es bei letztern immer mit dem Dezimalsystem zu thun hatte, während bei den benannten Zahlen alle möglichen Eintheilungen ihrer Grundeinheit vorkommen können. Man kann nur zwischen gleichartigen und gleichnamigen Zahlen eine Differenz suchen, d. h. die zwei Glieder der Subtraction müssen eine Grundeinheit gemein haben und auf dem gleichen Theilungssysteme beruhen. Dasjenige Glied, welches den größern Werth enthält, wird mit seinen Theilen oben angesetzt und unter dasselbe das andere so, daß die gleichnamigen Maaßzahlen übereinander stehen. Die Subtraction fängt man mit den Zahlen der niedersten Ordnung beider Glieder an und setzt sie gegen die höchste fort. Der Unterschied zweier gleichnamiger Maaßzahlen wird jedesmal unter ihrem Namen besonders ausgedruckt. Kommt es vor, daß in einer Werthgattung die Zahl des Subtrahends größer ist, als die des Minuends, so nimmt man eine Einheit von der nächst höhern Ordnungszahl hinweg, löst sie in die Theile der niedern auf und addirt ihre Zahl zu der schon vorhandenen des gleichen Namens, worauf die Subtraction möglich ist.

1tes Beispiel. Den Unterschied zwischen den badischen Längenmaaßen:

1) 125 Ruthen, 9 Fuß, 8 Zoll, 7 Linien, und
2) 85 = 5 = 6 = 3 = zu suchen.

Auflösung. Die Eintheilung des badischen Längenmaaßes gründet sich einschließlich der Ruthe durchaus auf das Dezimalsystem; es ist nämlich:

1 Ruth. = 10 Fuß = 100 Zoll = 1000 Linien =

10000 Punkte u. s. f., so daß die zwei Subtractions-Glieder als Dezimalbrüche, deren ganze Zahlen hier Ruthen seyen, geschrieben werden können. Nach diesem wird der Unterschied wie gewöhnlich bei solchen Brüchen gefunden:

1) $125^{\circ},_{987}$
2) $85\ ,_{563}$

Differenz $= 40^{\circ},_{424}$ badisch Meß,

und heißt: 40 Ruthen, 4 Fuß, 2 Zoll und 4 Linien.

2tes Beispiel. Im badischen Gewichte soll man von 117 Ctr., 8 Pfund, 6 Quent, 3 Aß abziehen: 108 Ctr. 7 Zehnling, 4 Pfennig und 5 Aß.

Auflösung. Die Eintheilung des badischen Gewichtes geschieht nach Zehner, wie hier zu sehen:

Ctr.	Stein.	℔	Zehnling.	Quent.	Pfennig.	Achtel.
1	10	100	1000	10000	100000	1000000
	1	10	100	1000	10000	100000
		1	10	100	1000	10000
			1	10	100	1000
				1	10	100
					1	10

deßhalb können die gegebenen Gewichte in Dezimalbrüchen ausgedruckt werden, deren ganze Zahlen sich nach dem höchsten Werth richten; also:

$117,_{080603}$
$10,_{807045}$

Differenz $= 106,_{273558} = 106$ Ctr., 2 Stein, 7 Pfund, 3 Zehnling, 5 Quent, 5 Pfennig und 8 Aß.

3tes Beispiel. Es sind zwei Getraide-Vorräthe in badischem Fruchtmeß gegeben: 1) 6 Zuber, 9 Malter, 7 Meßlein und 6 Becher; 2) 5 Zuber, 8 Sester, 4 Meßlein und 9 Becher; man will den Unterschied dieser beiden Maaße wissen.

Auflösung. Das Getraide-Maaß ist im Badischen gleichfalls zehntheilig und hängt auf folgende Art zusammen:

Zuber.	Malter.	Sester.	Meßlein.	Becher.
1	10	100	1000	10000
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

Da in dem gegebenen Beispiele Zuber vorkommen, welche nach Vorstehendem den höchsten Werth haben, so nehme man solche zu den ganzen Zahlen zweier Dezimalbrüche und ziehe den kleinern von dem größern ab, wie hier folgt:

1) 6,9076
2) 5,0849

Differenz = 1,8227, was in die vorige Benennung aufgelöst heißt: 1 Zuber, 8 Malter, 2 Sester, 2 Meßlein und 7 Becher.

4tes Beispiel. Es seyen zwei Längenmaaße gegeben, bei denen die Ruthen 10schuhig, aber die Fuße u. s. w. zwölftheilig sind; man soll den Unterschied zwischen ihnen suchen, und solchen in der gleichen Eintheilung angeben:

1) 80°	6′	4″	11‴	Minuend,
2) 23	11	9	5	Subtrahend.

Differenz 56° 4′ 7″ 6‴; d. h. 56 Ruthen, 4 Fuß, 7 Zoll und 6 Linien.

Diese Subtraction gründet sich auf folgendes Verfahren:

Bei der niedersten Ordnung der Maaßtheile, den Linien, das Abziehen angefangen, bleiben 6 Linien übrig; in der höhern Ordnung der Zolle ist die Zahl des Subtrahends größer als die des Minuends; daher nehme man in solchem eine Einheit von der Zahl der Fuße weg und addire sie als 12 Zolle zu den vorhandenen 4 Zollen, so erhält man nun die Summe von 16, von welcher 9 abgezogen ein Rest von 7 Zollen bleibt. Im Minuend ist die Zahl der Fuße um 1 kleiner geworden und so nach 5 Fuße übrig geblieben, von denen 11 Fuße ab-

gezogen werden sollen, was nur dann möglich ist, wenn man 1 Ruthe von 80° wegnimmt, solche in ihre 10 Fuß auflöst und diese zu 5′ addirt. Von der auf solche Art erhaltenen Summe von 15 Fuß 11 abgezogen, bleiben 4 Fuß übrig. Statt 80° hat man nur noch 79°, weil eine für die Fuße entlehnt worden ist; zieht man von 79 die Ruthenzahl 23 des Minuends ab, so bleiben noch 56 Ruthen übrig und mit diesem Rest ist die Subtraction vollendet. — Auf die gleiche Art werden alle erdenklichen Fragen der Subtraction in benannten Zahlen aufgelöst. Das Haupterforderniß ist auch bei dieser Rechnungsart, wie bei den übrigen mit benannten Zahlen, die im Gebrauch stehende Eintheilung der Maaßeinheit für den in Frage gestellten Gegenstand, oder das Gesetz ihrer Vervielfältigung zu einer höhern Einheit im Voraus zu wissen. Wir werden deßhalb solchen Beispielen, welche Maaßeintheilungen betreffen, die noch nicht dargestellt worden, jedesmal das Nöthige beifügen.

5tes Beispiel. Der Zeitunterschied zwischen dem 5. Februar 1789 und dem 9. September 1834 soll gesucht werden.

Auflösung. Von dem Anfang der christlichen Zeitrechnung bis zum 9. Sept. 1834 ist es ein Zeitwerth von: 1833 Jahr, 8 Monat, 9 Tage und bis zum 5. Febr. 1789 einer von: 1788 Jahr, 1 Monat, 5 Tage. Zieht man nun letztern von dem erstern ab, so erhält man:

1833	Jahr,	8	Monat,	9	Tag
1788	=	1	=	5	=
Differenz =	45 Jahr,	7	Monat,	4	Tag.

6tes Beispiel. Es sind die Maaße zweier Winkel in der 60. Theilung gegeben, man verlangt, ihren Differenz-Winkel zu wissen.

Auflösung.	Seye 1)	150°	45′	38″,58
so ist	2)	109	53	44″,73 so ist
der Differenzwinkel =		40°	51′	53″,85

Von den Graden an bis zu den Sekunden macht eine Einheit der höhern Ordnung 60 Einheiten der nächst niedern aus. Den Sekunden sind Dezimaltheile einer Sekunde angehängt, welche wie gewöhnliche Zahlen, oder wie Ziffern eines Dezimalbruchs behandelt werden.

7tes Beispiel. Wenn man aus einem Fasse, welches nach dem neuen preußischen Getränkemaaß, mit 4 Fuder, 3 Orhoft, 2 Eimer und 26 Quart gefüllt ist, einmal 43 Eimer und 28 Quart, und ein andermal 3 Orhoft und 35 Quart herausläßt, wie viel Eimer und Quart bleiben noch in dem Fasse zurück?

Auflösung. Die seit 1816 gültige Eintheilung des preußischen Getränkemaaßes ist folgende:

Fuder,	Orhoft,	Ohm,	Eimer,	Anker,	Quart,	Oesel
1 =	4 =	6 =	12 =	24 =	720 =	1440
	1 =	$1\frac{1}{2}$ =	3 =	6 =	180 =	360
		1 =	2 =	4 =	120 =	240
			1 =	2 =	60 =	120
				1 =	30 =	60
					1 =	2

Da man nur Eimer und Quart in dem Reste haben will, so müssen die drei gegebenen Maaße auf solche gebracht werden; es ist demnach:

Inhalt des Fasses = 4 Fuder + = 48 Eimer
3 Orhoft + = 9 "
2 Eimer + = 2 "
26 Quart

zusammen = 59 Eimer, 26 Quart.

1te Ablassung = 43 Eimer, 28 Quart
2te Ablassung = 9 " 35 " (3 Orhoft = 9 Eimer)

zusammen = 53 Eimer 3 Quart.

Letztere Summe von der erstern abgezogen:

59 Eimer, 26 Quart
53 = 3 =

Rest = 6 Eimer 23 Quart.

8tes Beispiel. Den Unterschied der zwei Flächenmaaße 1) 189□Ruthen, 135′□, 98″□ und 2) 167°□, 143′□, 115″□, 125‴□ zu finden, wobei vorausgesetzt wird, daß den Ruthen das 10schuhige Längenmaaß, den andern Maaßtheilen aber die 12fache Theilung zu Grunde liege.

Auflösung. Man setze die zwei Maaße mit gleicher Benennung untereinander, und ziehe wie gezeigt wird, ab:

		100	144	144
1)	189°□	135′□	98″□	0‴□
2)	167	143	115	125
Rest =	21°□	91′□	126″□	19‴□

Im Minuend mußte man von jedem Maaßwerthe eine Einheit für die nächst niedere Ordnung entlehnen. Die entlehnte Einheit des Fußes, des Zolles, wurde in 144 Zolle und 144 Linien Quadratmaaß aufgelöst und nun zu den gleichnamigen Zahlen addirt, worauf die Subtraction möglich ward. Anders verhielt es sich mit der Auflösung der Ruthencinheit in Quadratfuße, indem angenommen worden, solche seye nicht 12theilig, wie die übrigen Maaße, sondern 10theilig, und enthalte daher nur 100 Quadratfuße.

Es seye hier ein für allemal angerathen, sich die Verminderung einer Maaßzahl um eine Einheit wohl zu merken, damit man sie nicht doppelt in Rechnung bringe. Am besten thut man daran, eine Wegnahme der Einheit durch einen Punkt an der betreffenden Zahl anzudeuten.

Ueber das Dezimalflächenmaaß wird für die Subtraction kein Beispiel nöthig seyn, da das hierauf sich beziehende Verfahren leicht aus dem beim Addiren und Multipliciren Erklärten abgeleitet werden kann. Die gleiche Bewandtniß hat es mit dem Dezimalkubikmaaß.

9tes Beispiel. Von den Kubikmaaßen:

1) $238^{Cq.}$ Klafter, $978'^{Cq.}$, $1625''^{Cq.}$ und 2) $206^{Cq.}$ Kl. $1718''^{Cq.}$ den Unterschied zu suchen. Die Maaße gehören ausser den Klaftern, welche jederzeit 6schuhige Seiten haben, dem Duodezimalsystem an.

Auflösung. Die Kubikklafter hat 216 Kubikfuß und eine Einheit der andern Maaßwerthe beträgt 1728 Einheiten ihrer nächst niederen Ordnung; daher:

		1728″
$238^{o Cq.}$	$978'^{Cq.}$	1625^{Cq}
206	0	1718
Differenz = $32^{o Cq.}$	$977'^{Cq.}$	$1635''^{Cq.}$

10tes Beispiel. In preußischem Gelde besitzt man eine Summe von 1524 Thalern, 15 Silbergroschen und 7 Pfennigen, davon giebt man 875 Thaler, 26 Silbergroschen und 10 Pfennigen aus, wie viel hat man noch übrig?

Auflösung. Das preußische Silbergeld wird eingetheilt in:

Thaler,	Silbergroschen,	Pfennigen
1	30	360
	1	12

daher die Subtraction:

	30	12
1524 Thlr.	15 S.Gr.	7 Pfg.
875 =	26 =	10 =
Rest = 448 Thlr.	18 S.Gr.	9 Pfg.

11tes Beispiel. Im Zwanzig-Guldenfuß giebt Jemand von 955 Reichsthalern, 16 gute Groschen und 5 Pfennigen die Summe von 866 Reichsthalern, 19 gute Groschen und 11 Pfennige aus, wie viel bleibt ihm übrig?

Auflösung. Der Zwanzig-Guldenfuß besteht in:

Reichsthlr.	G.Groschen.	Pfennigen.
1	20	240
	1	12

Hiernach die Subtraction vollzogen, giebt:

		20		12	
935	Rchsthlr.	10	G.Gr.	5	Pf.
866	=	19	=	11	=
Rest =	68 Rchsthlr.	16	G.Gr.	6	Pf.

12tes Beispiel. Wenn man von 547 Schweizer-Francs und 16 Sols, die Summe von 493 Francs und 9 Batzen wegnimmt, wie viel Francs und Batzen bleiben übrig?

Auflösung. Der Werth des Schweizer-Franc's ist: 1 Franc = 20 Sols = 10 Batzen, daher 1 Batzen = 2 Sols und die obigen 16 Sols = 8 Batzen; folglich:

		10		
547	Francs	8	Batzen	
493	=	9	=	
Rest =	53 Francs	9	Batzen.	

§. 188.

b) Durch Division.

Wenn ein mehrgliedriger Werth eines Maaßes durch irgend eine Zahl dividirt, d. h. in so viele gleiche Theile getheilt werden soll, als der Divisor Einheiten enthält, so beginne man die Division mit der Theilung des höchsten Gliedes; den erhaltenen Rest verwandle man in Theile der nächst niedrigen Ordnung und addire ihre Anzahl zu den bereits vorhandenen gleichnamigen Maaßtheilen; die entstehende Summe wird nun wieder durch den nämlichen Divisor dividirt, und auf die vorige Weise fortgefahren, bis alle Glieder des gegebenen Maaßwerthes getheilt sind. Die Summe der entstandenen einzelnen Quotienten ist nun die Zahl des Hauptquotienten der verlangten Division.

1tes Beispiel. Es seye die Summe von 128 fl. 16 kr. 5 Heller (im 24 fl. Fuß) in 3 Theile zu theilen.

Auflösung. 128 fl. durch 3 dividirt, erhält man zum Quotienten 42 fl. und als Rest bleiben 2 fl. Diese 2 fl. mit der nächst niedern Ordnung gleichnamig, d. h. zu Kreu-

zern gemacht, was durch die Multiplication mit 60 geschieht, indem, wie bekannt, 1 fl. = 60 kr. ist, so hat man für dieselben 120 kr.; es sind aber in dem Dividend schon 16 kr. vorhanden, welche mit den vorigen die Summe von 136 kr. ausmachen; diese Summe durch 3 getheilt, giebt einen Quotienten von 45 kr. und einen Rest von 1 kr. Nun enthält eine Einheit der Kreuzer 6 Einheiten ihrer nächst niedern Ordnung, d. i. 1 kr. ist gleich 6 Heller; multiplicirt man die Zahl des Kreuzerrests mit 6 und addirt die gegebenen 5 Heller zu dem Produkte, so entsteht die Summe von 11 Heller, welche abermals durch 3 dividirt werden muß. Vollzieht man die Division, so erhält man 3 Heller als Quotienten und 2 Heller zum Rest. Da jedoch kein weiteres Glied in dem gegebenen Maaße vorkommt, auch keine Münzen von kleinerem Werthe im Gebrauche sind, so kann man den Rest in keine geringern Einheiten verwandeln, die bekannt wären, sondern man beendigt die Division nun dadurch, daß man sie um dem Rest von 2 Heller durch den Bruchquotienten $\frac{2}{7}$ Heller anzeigt. Faßt man die einzelnen Quotienten der ausgeführten Divisionen zusammen, so hat man in der entstehenden Zahl den Werth für den dritten Theil von 128 fl. 16 kr. 5 Heller = 42 fl. 45 kr. $3\frac{2}{7}$ Heller.

2tes Beispiel. Von 1810 Centner (100pfündig), 78 Pfund, 17 Loth und 3 Quent, soll der siebente Theil angegeben werden.

Auflösung:

		1ter Quotient
7	1810	258 Centner
	14	
	41	
	35	
	60	
	56	

Rest = 4 Centner.

1 Ctr. = 100 ℔, also $4 \times 100 + 78 = 478$ ℔, daher

7|478|68 Pfund (2ter Quotient)
42
58
56
Rest = 2 Pfund.

1 ℔ = 32 Loth, also 2 × 32 + 17 = 81 Loth, mithin

7|81|11 Loth (3ter Quotient)
7
11
7
Rest = 4 Loth.

1 Loth = 4 Quent, also 4 × 4 + 3 = 19 Quent, daher:

7|19|2 Quent (4ter Quotient)
14
Rest = 5 Quent.

Will man keine kleinere Gewichtstheile als Quent haben, so muß der letzte Rest 5 Quent mit 7 dividirt werden, woraus der Quotient $\frac{5}{7}$ Quent entsteht. — Zieht man die einzelnen Quotienten zusammen, so hat man die Zahl des siebenten Theils von der gegebenen Größe in der gleichen Eintheilung, d. i. 258 Ctr., 68 ℔, 11 Loth und $2\frac{5}{7}$ Qt.

3tes Beispiel. Eine Länge von:

12theilig

3459 Ruthen (10schuhig), 9 Schuh, 11 Zoll, 8 Linien, soll in 13 gleiche Theile getheilt werden; wie groß wird jeder seyn müssen?

Auflösung:

13|3459|266 Ruthen (1 O.)
26
85
78
79
78
Rest = 1 Ruthe;

da 1 R. = 10 Fuß, s. i. 1 × 10 + 9 = 19 Fuß und

13|19|1 Fuß (2 Q.)
13|

Rest = 6 Fuß;

da 1 Fuß = 12 Zoll, s. i. 6 × 12 + 11 = 83 Zoll, und

13|83|6 Zoll (3 Q.)
78|

Rest = 5 Zoll;

da 1 Zoll = 12 Linien, s. i. 5 × 12 + 8 = 68 Linien, und

13|68|5 Linien (4 Q.)
65|

Rest = 3 Linien;

den Quotienten zum letzten Rest in Dezimaltheilen einer Linie gesucht, giebt:

13,30|0,2308 (5 Q.)
26|
40
39
100
=

Die Zahl aus sämmtlichen Quotienten ist der 13te Theil des vorgegebenen Maaßes =

266° (10schh.), 1′, 6″, 5‴,2308.

4tes Beispiel. Eine Fläche von 37 Morgen, 113□ Ruthen, 85□Schuh württemb. Meß, in welchem die Längenruthe zu 16 Fuß und der Schuh 12theilig angenommen ist, soll in 15 gleiche Theile getheilt werden; was ist der Flächengehalt eines Theils?

Auflösung: 15|37|2 Morgen (1. Quot.)
30|

Rest = 7 Morgen;

da 1 Morgen = 150 □Ruthen (16schh.) hat, so ist:
7 × 150 + 113 = 1163 □Ruthen, solche dividirt

15|1163|77 □Ruthen (2. Quot.)
105|
113
105

Rest = 8 □Ruthen;

eine 16thl. □Ruthe = 256 □Fuß:

$8 \times 256 + 16 = 2133$ □Schuh; ſolche mit 15 getheilt:

15 | 2133 | 142 □Schuh (3. Quot.)
15 |
63
60
33
30
Reſt = 3 □Schuh.

Da 1 □Schuh = 144 □Zoll, ſo iſt $3 \times 144 = 432$ □Zoll, und

15 | 432 | 28 □Zoll (4 Quot.)
30 |
132
120
Reſt = 12 □Zoll.

Da 1 □Zoll = 144 □Linien, ſ. i. $12 \times 144 = 1728$ □Linien, und

15 | 1728 | 115 □Linien (5. Quot.)
15 |
22
15
78
75
Reſt = 3 □Linien.

Verlangt man keine kleinere Flächentheile als Linien, ſo giebt der Quotient des letzten Reſts entweder einen gewöhnlichen Bruch $= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ □Linien, oder einen Dezimalbruch, deſſen Ziffern Theile einer Quadratlinie ſind.

Für letztere Annahme findet Statt:

1 □Linie = 100 □Zehnling, daher $3 \times 100 = 300$ □Zehnling

15 | 300 | 20 (6. Quot.)
30 |
=

Die Quotienten zuſammen geben die Zahl des 15. Theils von dem gegebenen Flächengehalt, d. i. = 2 Morgen, 77□ Ruthen, 142 □Schuh, 28□Zoll, $115{,}_{20}$□Linien.

5tes Beiſpiel. Den 23. Theil des Kubikmaaßes: 867 Klafter, 209 Fuß, 165 Zoll und 177 Linien zu finden. Der Fuß ſey im Duodezimalſyſtem getheilt.

Auflösung: $23 \mid 867 \mid 37^{\text{Cq. Klafter}}$ (1. Q.)
69
177
161
Rest $= 16^{\text{Cq. Klafter}}$.

Da $1^{\text{Cq. Kl.}} = 216^{\text{Cq. Fuß}}$, f. i. $16 \times 216 + 209 = 3665^{\text{Cq. Fuß}}$; daher $23 \mid 3665 \mid 159^{\text{Cq. Fuß}}$ (2. Q.)
23
136
115
215
207
Rest $= 8^{\text{Cq. Fuß}}$.

Da $1^{\text{Cq. Fuß}} = 1728^{\text{Cq. Zoll}}$, so ist $8 \times 1728 + 165 = 13989^{\text{Cq. Zoll}}$, mithin $23 \mid 13989 \mid 608^{\text{Cq. Zoll}}$ (3. Q.)
138
189
184
Rest $= 5^{\text{Cq. Zoll}}$.

Da $1^{\text{Cq. Zoll}} = 1728^{\text{Cq. Linien}}$, so ist $5 \times 1728 + 177 = 8817^{\text{Cq. Linien}}$, und
$23 \mid 8817 \mid 383^{\text{Cq. Linien}}$ (4. Q.)
69
191
184
77
69
Rest $= 8^{\text{Cq. Linien}}$.

Der 5. Quotient wäre entweder $\frac{8}{23}^{\text{Cq. Linien}}$ oder in Dezimaltheilen einer Kubiklinie ausgedruckt $= 0{,}348^{\text{Cq. Linien}}$; denn $1^{\text{Cq. Linie}} = 1000^{\text{Cq. Zehnlinge}}$, giebt für den letzten Rest $8 \times 1000 = 8000^{\text{Cq. Zehnlinge}}$ einer Linie; somit
$23 \mid 8000 \mid 348^{\text{Cq. Zehnling}}$ (5. Q.)
69
110
92
180
184

und der gesuchte 23. Theil von 867$^{Cq.}$Klafter, 209$'^{Cq.}$, 165$''^{Cq.}$, 177$'''^{Cq.}$ ist = 37$^{\circ Cq.}$, 159$'^{Cq.}$, 608$''^{Cq.}$, 383$'''^{Cq.}$,$_{348}$.

6tes Beispiel. Von dem Dezimallängenmaaß: 3979 Ruthen, 8 Fuß, 7 Zoll und 4 Linien den eilften Theil zu suchen.

Auflösung: Es ist bekannt, daß irgend ein Dezimalmaaß durch einen Dezimalbruch oder auch eine ganze Zahl vorgestellt werden kann, wenn im ersten Falle eine beliebige Einheit der verschiedenen Maaßordnungen, im andern Falle aber die der niedersten Ordnung zur Einheit der ganzen Zahl genommen wird. In dem angenommenen Beispiele seye die Ruthe die ganze Einheit, so ist in 3979°,$_{874}$ das gegebene Maaß ausgedruckt, dessen Theilung durch 11 auf dieselbe Weise geschieht, wie sie bei der Division der Dezimalbrüche gezeigt worden ist. Demnach:

```
11000 3979874|361°,807 beinahe
      |33000 |
      ---------
       67987
       66000
      ---------
        19874
        11000
      ---------
         88740
         88000
      ---------
           74000
```

7tes Beispiel. Das Flächenmaaß 666 Morgen, 325 □Ruthen, 89 □Fuß und 37 □Zoll württemb. Meß, dessen Ruthen und Fuße zehntheilig sind, in 8 gleiche Theile zu theilen und den Gehalt des einzelnen Theils anzugeben.

Auflösung: Da die Zusammensetzung der Dezimal-Quadratruthen zu dem Werthe eines württemb. Morgen nicht nach dem Dezimalsystem Statt findet, weil 384□Ruthen gleich 1 Morgen württemb. sind, so kann auch der Werth eines solchen Morgen nicht durch die Ordnung der Ziffern, wie die übrigen Maaßtheile nach dem dekadischen Gesetze ausgedruckt, sondern derselbe muß mit einer Zahl besonders aufge-

führt werden. Weil aber die □Ruthe aus 10 × 10 Fuß besteht, so gehört ihre Zahl in die höchste Ordnung des Dezimalflächenmaaßes. Nimmt man die □Ruthe als die Einheit der ganzen Zahl des Dezimalbruches an, so heißt das gegebene Maaß:

666 Morgen und 325°□,8937.

Diese beiden Theile mit 8 dividirt:

8|666|83 Morgen (1. Q.)
64
26
24
Rest = 2 Morgen.

Da 1 Morgen = 384 □Ruthen, s. i. 2 × 384 + 325,8937 = 1093°□,8937; mithin 80000|10938937|136°□,7367125 (2. Q.)
80000..
293895
240000
538937
480000
589370
560000
293700
240000
537000
480000
570000
560000
100000
80000
200000
160000
400000

Der gesuchte 8te Theil des gegebenen Flächenmaaßes ist also:
83 Morgen, 136 □Ruthen 73 □Fuße, 67 □Zolle und 12,5 □Linien.

8tes Beispiel. Den kubischen Gehalt von 1923 Klafter, 189 Fuß, 877 Zoll und 635,38 Linien Dezimalmaaß, in 9 gleiche Theile zu theilen und den Werth eines Theils anzugeben.

Auflösung: 9|1923|213$^{Cq.}$Klafter (1. Q.)
18
12
9
33
27
Rest = 6$^{Cq.}$Klafter.

Da 1$^{Cq.}$Klafter = 216$'^{Cq.}$, so ist 6 × 216 + 189,$_{87763538}$ = 1485$'$,$_{87763538}$. Diese Summe ebenfalls getheilt.

9|1485,$_{87763538}$|165$'^{Cq.}$,$_{09751504222}$ . . . . . .
9 . . . . . .
58
54
45
45
=87
81
67
63
46
45
13
9
45
45
=38
36
2

Mithin der Werth des gesuchten Maaßes = 213$^{Cq.}$Klafter, 165$'^{Cq.}$, 97$''^{Cq.}$, 515$'''^{Cq.}$, 42$^{IVCq.}$, 222$^{VCq.}$,$_{222}$ . . . . .

9tes Beispiel. Das Duodezflächenmaaß: 325 Fuß, 112 Zoll und 98,$_7$ Linien solle durch das Duodezlängenmaaß: 18 Fuß, 54 Zoll und 25 Linien dividirt werden. Solche Fälle kommen vor, wenn der Inhalt und die Grundlinie, oder der Inhalt und die Höhe einer Figur bekannt sind, und man die eine oder die andere dieser Dimensionen finden soll.

Auflösung. Ist, wie im gegebenen Beispiele, das höchste Glied des Dividends größer als das höchste des Divisors und beide gleichnamig, so dividire man mit dem letztern

in das erstere, multiplicire nach und nach alle Glieder des Divisors mit der erhaltenen Quotientenzahl, und setze die entsprechenden Produkte unter die Glieder des Dividends in derjenigen Ordnung, wie solche in §. 181 erklärt wurde. Bleibt nach dem Abzug der Produkte ein Rest, so dividire man wiederum in dessen höchstes Glied mit dem Divisor und verfahre auf die nämliche Art weiter, wie schon angegeben wurde. Die Division wird so oft wiederholt, als noch ein Rest bleibt, wenn man sie nicht da abbrechen will, wo der Quotient so kleine Maaßtheile enthält, die man für den beabsichtigten Zweck kaum noch zu beachten im Stande ist. Da es nicht anders seyn kann, als daß der Rest des ersten Gliedes einer Division immer kleiner wie der Divisor wird, so muß man seine Zahl für den nächsten Dividend in Theile der niedern Ordnung verwandeln, und ihre Summe zu der vorhandenen gleichnamigen Zahl addiren. Jedesmal muß aber auch das erste Glied des Divisors gleichlautend mit dem ersten des Dividends gemacht werden.

Die Ausführung unseres Beispieles wäre:

(*) $18' + 54'' + 25''' | 525'\square + 112''\square + 98'''\square,_{70} | 14'$ (1. Quot.)

$$14.18' + \frac{14.12.54'}{12.12} + \frac{14.\not{12}.\not{12}.25''}{\not{12}.\not{12}} =$$

$$252 + \frac{(9072 + 350)'}{144} =$$

$317'\square + 62''\square$; diese Produkte abgezogen

bleibt Rest $= 8'\square + 50''\square + 98'''\square,_{70}$

Nun verwandle man das erste Glied des Divisors $18'$ durch Multiplication mit 12 in Längenzolle und addire $54''$ dem Produkt bei; das erste Glied des Restes $8'\square$ aber muß

(*) Eigentlich sollte dieses Duodezlängenmaaß vorher auf seinen kleinsten Ausdruck, nämlich auf $22'$, $8''$, $1'''$ gebracht werden; aber man wollte nur dem Anfänger zeigen, daß das angegebene Verfahren auch unter verwickelten Umständen nicht schwer ist, und überlassen ihm die Ausführung der Division mit dem vereinfachten Divisor.

mit 144 multiplicirt, und diesem Produkt die vorhandenen 47″□ beigezählt werden, worauf die Division wie vorhin behandelt wird; also:

$$270'' + 25'''\,|\,1202''\square + 98{,}_{70}\,|\,4'' \text{ (2. Quot.)}$$

$$4 \cdot 270'' + \frac{4 \cdot 12 \cdot 24''}{12 \cdot 12} =$$

$$1080 + \frac{1200}{144} =$$

$$1088 + 48{,}_{00}\text{; dieses abgezogen}$$

bleibt $= 114''\square + 50'''\square{,}_{70}$; als 2ter Rest.

Sowohl das erste Glied des Divisors, als das des Restes in die entsprechenden niedern Ordnungen verwandelt, erhält man:

$$32650\,|\,164667\ 5'''{,}_{0434} \ldots\ldots\ldots \text{ (3. Quot.)}$$

165250	
= 141700	
130600	
111000	
97950	
13050	

Das andere Längenmaaß, aus dessen Multiplication mit dem Divisor das vorgegebene Flächenmaaß entstanden ist, beträgt nun zusammen =

$$14', 4'', 5'''{,}_{0434} \ldots$$

Solches kann auch, auf dem freilich beschwerlichern Wege gefunden werden, wenn man sowohl die Glieder des Divisors als des Dividends in Einheiten der niedersten, aber gleichlautenden Maaßordnung verwandelt, aus den erhaltenen Zahlen den Quotienten sucht, und solchen wiederum auf die höhern Maaßwerthe reduzirt. Aus solchem Verfahren geht hervor:

Länge $18 \times 12 \times 12 + 54 \times 12 + 25 = 5265'''$.

Fläche $325 \times 144 \times 144 + 112 \times 144 + 98{,}_7 = 6755426'''\square{,}_7$

und $\frac{6755426{,}_7}{5265} = 2069'''{,}_{0434} = 172'' + 5'''{,}_{0434} =$

$= 14' + 4'' + 5'''{,}_{0434} \ldots$ wie vorhin.

Beide Methoden können mit Vortheil dazu benützt wer-

den, die Richtigkeit der Rechnung nach der einen durch die andere zu prüfen.

10tes Beispiel. Der Inhalt einer rektangulären Fläche ist im Duodezmaaße $= 17'\square + 11''\square + 8'''\square,_{93}$; auch kennt man die Höhe $= 9'' + 10''',_{15}$ nach dem gleichen Maßstabe; wie groß ist die Grundlinie der Fläche?

Auflösung. Das erste Glied des Dividends ist von höherer Ordnung als das des Divisors, daher bringe man dasselbe mit diesem auf gleichlautende Benennung, und addire das gleichartige Maaß der gefundenen Summe zu, so erhält man:

$$(17 \times 144)''\square + 11''\square + 8'''\square,_{93} = 2459''\square + 8'''\square,_{93}$$

und hierauf die Division wie vorhin ausgeführt:

$$9'' + 10''',_{15} \,\big|\, 2459',\square + \overset{144,00}{8''\square,} \,\big|\, 249''$$

$$9 \,.\, 249'' + \frac{(249 \,.\, 12 \,.\, 10,_{15})''}{144} =$$

$$(2241 + 210)'' + 88''',_{20} =$$

$$2451 \quad + \quad 88,_{20} \text{ Subtrahend}$$

$$\text{Rest} = \quad 7''\square \quad + \quad 64'''\square,_{73}$$

Die nöthigen Verwandlungen vorgenommen:

$$118''',_{15} \,\big|\, 1072,_{73} \,\big|\, 9''',_{0794} \text{ beinahe}$$

$$\begin{array}{r} 1063,_{35} \\ \hline = = = 93800 \\ 82705 \\ \hline 110950 \\ 106335 \\ \hline = = 46150 \end{array}$$

Die gesuchte Grundlinie ist also $= 249'', 9''',_{0794} = 20', = 9'', 9''',_{0794}$ Duodezmaaß.

Wenn man in beiden Theilen der Division die Werthe der Linien als Brüche der Zolle darstellt, so hat man:

$$\left(9\frac{10,_{15}}{12}\right)'' \,\Big|\, \left(2459\frac{8,_{93}}{144}\right)'' \,\Big|; \text{ woraus:}$$

$$\frac{2459 \,.\, 144 + 8,_{93}}{144} : \frac{9 \,.\, 12 + 10,_{15}}{12} = \frac{2459 \,.\, 144 + 8,_{93}}{144} \times \frac{12}{9 \,.\, 12 + 10,_{15}} =$$

$$\frac{2459.144+8{,}93}{12.9.12+10{,}15.12} = \frac{354096+8{,}93}{1296+121{,}80} = \left(\frac{354104{,}93}{1417{,}80}\right)''$$

Die Division verrichtet:

141780 | 35410495 | 249″
285560..

705449
567120

1383293
1276020

Rest der Zolle = 107273; diesen zu Linien gemacht:

12

214546
107273

141780 | 1287276 | 9‴,0794 beinahe
1276020

1125600
992460

1331400
1276020

55380

Man kann auch den Divisor mit dem Dividend, wie solcher gegeben wurde, gleichnamig machen, wenn man $1'' = \frac{1}{12}'$ und $1''' = \frac{1}{12}''$ setzt; auf diese Art wird die Division:

$$\frac{9'}{12} + \frac{10'',15}{12}\,17'\square + \frac{144}{11''\square} + 8''',\square 93 \;\Big|\; 20' \text{ (1. Q.)}$$

$$20\frac{9'}{12} + \left(\frac{12.20.10{,}15}{12}\right)'' =$$

$$\left(15+\frac{205}{144}\right)' =$$

$$16' + 59''$$

Rest = $96'' + 8''',93$.

Den vorigen Divisor diesem Rest angepaßt:

$$9'' + 10''',15 \;\Big|\; 96''\square + 8''',\overset{144}{\square}93 \;\Big|\; 9'' \text{ (2. Q.)}$$

$$(9\times 9)'' + (9.12.10{,}15)''' =$$

$$81'' + 1096''',20 =$$

$$88 + 88\,,20 \text{; Subtrahend}$$

Rest = $7'' + 64''',73$.

Ferner ist: $\left(\frac{1072,73}{118,15}\right)''' = 9''',0794$ (3. Q.) wie vorhin.

In einem solchen Falle, wie der gegebene, ist es allerdings bequemer, beide Theile der Division in denjenigen gleichlautenden Maaßwerth aufzulösen, welcher sich unter ihnen in der niedersten Ordnung befindet. Nach diesem wird die Division und Reduktion wie sonst verrichtet. Die Auflösung des Beispiels auf solche Art ist:

$$\frac{17 \cdot 144 \cdot 144 + 11 \cdot 144 + 8,93}{9 \cdot 12 + 10,15} = \frac{(17 \cdot 144 + 11)\,144 + 8,93}{9 \cdot 12 + 10,15} =$$

$$\frac{354104,93}{118,15} = 2997''',0794 = 249'' + 9''',0794 =$$

$$20', 9'', 9''',0794.$$

11tes Beispiel. Man soll zu dem 12theiligen Quadratmaaß einer Fläche $= 135''\square$, $75'''\square,23$ und zu der bekannten Grundlinie im Duodezmaaß $= 5'$, $9''$, $7''',6$ die entsprechende Höhe finden.

Auflösung: Es ist $5'$, $9''$, $7''',6 = 69''$, $7''',6$; daher:

$$69'' + 7''',6 \;|\; 135'', 75''',23 \;|\; 1'' \text{ (1. Q.)}$$

$$69'' + (12 \cdot 1 \cdot 7,6)''' =$$

$$69'' + \quad 91''',20$$

$$65'' + \quad 128''',03$$

Divisor und Rest zu Linien gemacht:

$$835,60 \;|\; 9488,03 \;|\; 11''',355 \text{ beinahe (2. Q.)}$$

$$83560$$

$$113203$$

$$83560$$

$$296430$$

$$250680$$

$$457500$$

$$417800$$

$$39700$$

hiezu durch das andere Verfahren die Probe gemacht:

$$\frac{135.144+75{,}23}{5.12.12+9.12+7{,}6} = \frac{135.144+75{,}23}{(5.12+9)12+7{,}6} = \frac{19515{,}23}{835{,}6} =$$

$23''',355 = 1'', 11''',355$ Duodezmaaß.

12tes Beiſpiel. Der Inhalt einer rektangulären Fläche ſeye $= 19°\square$, $76'\square$, $85''\square$, $54'''\square{,}8$ und die Grundlinie $=$ $67'$, $6''$, $7{,}5$ durchaus im Dezimalmaaß gegeben, man ſolle die entſprechende Höhe ſuchen.

Auflöſung: Nachdem man beide Maaße in Dezimalbrüche mit gleichlautender Benennung gebracht hat, wird, wie bei der Diviſion derſelben, in den unbenannten Zahlen verfahren:

67675000 | 135350000	197685348 | $2{,}9211$ beinahe	
	623353480	
	609075000	d. h.
	142784800	$2°, 9', 2'', 1''',1$
	135350000	
	74348000	
	67675000	
	=6673000	

Es wäre überflüßig, noch weitere Beiſpiele der Art zu geben, da ſie ſich immer auf ein und denſelben Fall zurückführen laſſen.

13tes Beiſpiel. Man ſoll einen körperlichen Inhalt von 125 Klafter, $207'^{Cq.}$, $1529''^{Cq.}$ Duodezmaaß durch das 12theilige Längenmaaß: $220'$, $10''$, $4'''$ dividiren.

Auflöſung: Wir wollen hiebei ein anderes Verfahren, welches auch auf die frühern Beiſpiele bezogen werden kann, anwenden; nämlich daß man zunächſt die Anzahl der Quadratklafter, hierauf der Quadratfuße u. ſ. f. des Quotienten ſucht. Für dieſen Fall ſetze man $220'$, $10''$, $4'''$ Längenmaaß $=$ 36 Klafter, $4'$, $10''$, $4'''$. Nennt man den noch unbekannten Quotienten $= x$ ſ. i.

$(36° + 4' + 10'' + 4''') x\square = 125°^{Cq.} + 207'^{Cq.} + 1529''^{Cq.} =$

daher $x\square = \frac{125^\circ + 207' + 1529''}{36^\circ + 4' + 10'' + 4'''}$; bringt man jeden Maaßtheil auf Klafter, so erhält man:

$$x = \frac{125 + \frac{207}{216} + \frac{1529}{216 \cdot 1728}}{36 + \frac{4}{6} + \frac{10}{6.12} + \frac{4}{6.12.12}} = \frac{\frac{125 \cdot 216 \cdot 1728 + 207 \cdot 1728 + 1529}{216 \cdot 1728}}{\frac{36 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 + 4 \cdot 12 \cdot 12 + 10 \cdot 12 + 4}{6 \cdot 12 \cdot 12}}$$

$$= \frac{125 \cdot 216 \cdot 1728 + 207 \cdot 1728 + 1529}{216 \cdot 1728} \times \frac{6 \cdot 12 \cdot 12}{36 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 + 4 \cdot 12 \cdot 12 + 10 \cdot 12 + 4}$$

$$= \frac{(125 \cdot 216 + 207) 1728 + 1529}{216 \cdot 2} \times \frac{1}{(36 \cdot 6 \cdot 12 + 4 \cdot 12 + 10) 12 + 4} =$$

$\frac{47015225}{13739528}$. Die Divisionen wirklich ausgeführt:

13739528 | 47015225 | 3 □Klafter (1. Q.)
41217984

Diesen Kl.Rest = 5797241 zu Quadr.Fußen gemacht:
36
34783446
17391723

13739528 | 208700676 | 15 □Fuß (2. Q.)
13739528

71307396
68696640

diesen Fußrest = 2610756 zu Quadr.Zollen gemacht.
mit 144
10443024
10443024
2610756

13739528 | 375948864 | 27 □Zolle (3. Q.)
27478656

101162304
96175296

dies. Zollrest = 4987008 zu Quadr.Linien gemacht.

```
          4987008
              144
        ---------
         19948032
        19948032
        4987008
13739328|718129152|52,2681 □Linien (4. Q.)
        |68696640 |
        ---------
         31162752
         27478656
        ---------
          36840960
          27478656
         ---------
           93623040
           82435968
          ---------
           111670720
           109914624
          ---------
             1756096
```

demnach die Zahl des ganzen Quotienten

$x = 3$ □Kl., 15′□, 27″□, 52‴□,2681 DuodezM.

Man kontrollire nun dieses Resultat dadurch, daß man den ersten Werth von x durchgängig auf Fuße bringt, was auch etwas einfacher ist. Der erste Quotient wird in diesem Falle natürlich eine Zahl der Quadratfuße werden. Sonach ist:

$$= x\frac{125 \cdot 216 + 207 + \frac{1529}{1728}}{220 + \frac{10}{12} + \frac{4}{12 \cdot 12}} = \frac{\frac{(125 \cdot 216 + 207)\,1728 + 1529}{1728}}{\frac{220 \cdot 144 + 10 \cdot 12 + 4}{12 \cdot 12}} =$$

$$= \frac{(125 \cdot 216 + 207)\,1728 + 1529}{\cancel{1728}} \times \frac{\cancel{12} \cdot \cancel{12}}{220 \cdot 144 + 10 \cdot 12 + 4} =$$

$$\frac{(125 \cdot 216 + 207)\,1728 + 1529}{12 \cdot 12\,(220 \cdot 12 + 10) + 4 \cdot 12} = \frac{47015225}{381648}$$

Die Division wirklich ausgeführt, wird:

```
381648|47015225|123 □Fuß (1. Q.)
      |381648. |
      ---------
        885042
        763296
       ---------
        1217465
        1144944
       ---------
```

dies. Rest d. Fuße = 72521 zu □Zollen gemacht.

72521
144
290084
290084
72521
381648 | 10443024 | 27 □Zolle (2. Q.)
763296
2810064
2671536
diesen Zollrest = 138528 zu □Linien gemacht.
144
554112
554112
138528
381648 | 19948032 | 52,2681 □Linien (3. Q.)
1908240
865632
765296
1023360
763296
2600640
2289988
3107520
3053184
54336

Die einzelnen Quotienten zu der Zahl des Flächenmaaßes zusammengezogen, hat man: 123′□, 27″□, 52‴□,2681, was dem vorigen Werth von x ganz gleich ist.

14tes Beispiel. Der Inhalt eines Körpers sey = 1132 Dez.Kubikruthen, 846′Cq., 915″Cq., 85‴Cq.,19 Dezimalmaaß, die Grundfläche desselben ein Rechteck und sein senkrechter Durchschnitt auf letztere ein Quadrat im Dezimalflächenmaaß = 58 □Ruthen, 96′□, 57″□, 37‴□,08; wie lang ist die Grundfläche?

Auflösung: Die unbekannte Länge = x angenommen und beide gegebene Dezimalmaaße auf Dezimalbrüche mit gleichlautender Benennung gebracht, so muß seyn:

$$x \times 58^{\circ}\square,_{96573708} = 1132^{\circ}\square,_{84691508519}.$$

$$x = \frac{1132,_{84691508519}}{58,_{9657\,708}}$$

Die Diviſion wirklich ausgeführt, wird:

5	8	9	6	5	7	3	7	0	8	0	0	0	1132846915085191	19,211952079022
													5896573708000	
													54318954428519	
													55069165372000	
													1249791056519	
													1179514741600	
													70476514919	
													58965737080	
													11510577839	
													5896573708	
													5614004131	
													5306916537	
													307087794	
													294828685	
													12259109	
													11793147	
													465962	
													412760	
													53202	
													53069	
													133	
													118	
													15	
													12	
													3	

Die auf den gegenwärtigen Fall angewandte Art zu dividiren, iſt bei Dezimalbrüchen ſehr zu empfehlen, da ſie viel weniger Zeit und Raum erfordert; auch wegen der Ziffernverminderung an Sicherheit gewinnet. Dieſelbe beſteht darin, daß, wie ſonſt, der Reſt durch Anhängung einer Null mit 10 multiplicirt und dadurch zu einem neuen Dividend des gleichen Diviſors von der Gattung der nächſt niedern Zahlordnung gemacht wurde, man nun den Dividend unverändert gelaſſen und den Diviſor allmählig mit 10 dividirt, d. h. ihm eine Ziffer für jede weitere Diviſion abgeſchnitten hat *), wodurch der gleiche

die geſuchte Länge iſt ſonach = 19 Ruthen (10ſchuhig) und 2,11952079022 Fuß Dezimallängenmaaß.

*) Da jeder Reſt als der Zähler eines Bruches angeſehen werden muß, deſſen Nenner der Diviſor iſt, und bei Verwandlung dieſes Quotienten in eine niedrige Maaßgattung durch Multiplication des Zählers mit den Theilen einer Einheit, ſolcher

Zweck, aber auf kürzerem Wege erreicht wird. Es ist hiezu noch anzumerken, daß man jedesmal die letzt abgeschnittene Ziffer des Divisors noch mit dem nächsten Quotienten multipliciren und die dadurch entstehende Zehnerziffer als Einheitszahl, oder über 5 Einer als eine Einheit zu dem Produkte der nun niedersten Ordnung in den Quotienten addiren muß.

---

§. 189.

Weitere Ausführung der Rechnungsarten mit benannten Zahlen.

Bei Rechnungen mit dem Duodezflächen- und Kubikmaaße kann man die großen Zahlen, welche leicht zu Fehlern Anlaß geben, auf folgende Art vermeiden. Man nehme an, es habe auch die Quadratruthe eine 12schuhige Länge und Breite, wie es in Preußen wirklich der Fall ist, also einen Inhalt von 144 Quadratfußen, ferner heiße man 12 Quadratfuße zusammen einen Flächenfuß, 12 Quadratzolle zusammen einen Flächenzoll u. s. w., so hat 1 Quadratruthe = 12 Flächenfuße, 1 Quadratfuß = 12 Flächenzolle, 1 Quadratzoll = 12 Flächenlinien u. s. w.; daher geschieht nun die Verwandlung solcher Maaßgattungen in Einheiten ihrer höhern Ordnung, durch Division mit 12, statt wie vorher mit 144.

Nro. 1. Es sollen z. B. folgende Duodezmaaße, die nach der gewöhnlichen Eintheilung gegeben sind *), in die angegebene verwandelt und addirt werden.

---

soviel heißt, als den Bruch mit dieser Zahl multipliciren, so kann dieß ja ebenso gut durch Division des Nenners mit eben der Zahl geschehen.

*) Ausgenommen, daß, wie gesagt, die Ruthen auch zwölftheilig seyen.

1) 196 □Rth. 118 □Fuß 89 □Zoll
2) 307 = 130 = 126 =
3) 73 = 99 = 109 =

so erhält man hiefür:

1)	196	□R.	9	Fl.Fuß.	10	□F.	7	Fl.Zoll.	5 □Z.
2)	307	=	10	=	10	=	10	=	6 =
3)	73	=	8	=	3	=	9	=	1 =
Summe =	578	□R.	5	Fl.Fuß.	1	□F.	3	Fl.Zoll.	0 =

Nro. 2. Ein gleiches Verfahren kann man bei den Duodezkubikmaaßen anwenden, wenn man 12 Kubikfuß zu einem Körperfuß, 12 Kubikzolle zu einem Körperzoll u. s. w. nimmt, so daß also 1 Kubikruthe = 144 Körperfuß, 1 Kubikfuß = 144 Körperzoll u. s. w. enthält; nach diesem verwandeln sich die gewöhnlichen Duodezkubikmaaße:

1) $21^{Cq.}$Rth. $1533'^{Cq.}$ $968''^{Cq.}$
2) 330 = 1068 = 1715 =
3) 568 = 895 = 1473 =

in folgende, und werden addirt:

1)	$21^{o Cq.}$	127	Körp.F.	$9'^{Cq.}$	80	Körp.Zoll.	$8''^{Cq.}$		
2)	330 =	89	=	0 =	142	=	11 =		
3)	568 =	74	=	7 =	122	=	9 =		
Summe =	921 =	3	=	6 =	58	=	4 =		

Die Reduktion geschieht hier mit den beiden Zahlen 144 und 12.

Man wird leicht einsehen, daß man solche Eintheilungen, die jeder beliebig annehmen kann, außer der Bequemlichkeit des vereinfachten Kalkuls, auch zur Prüfung einer Auflösung mit Nutzen wird gebrauchen können. Die Anwendung solcher Beispiele auf die übrigen Rechnungsarten überlassen wir Jedem zu seiner Uebung.

§. 190.

Es kommt sehr oft vor, daß dem letzten Gliede einer benannten Zahl ein gewöhnlicher Bruch angehängt ist, dessen

Nenner die Eintheilung der Einheit dieses Gliedes, so wie der Zähler die Anzahl solcher Theile anzeigt. Sind mehrere solcher Zahlen zu addiren, und die Brüche ihrer gleichnamigen Glieder haben einerlei Benennung, so darf man nur ihre Zähler summiren und die in dieser Summe enthaltenen ganzen Einheiten, welche man durch ihre Division mit dem gemeinschaftlichen Nenner erfährt, den ganzen Zahlen einverleiben und den Rest, welcher sich ergeben sollte, dem letzten Gliede der Hauptsumme mit seinem Divisor in Bruchform anhängen. Wären die Brüche der letzten Glieder jedoch nicht von gleicher Benennung, so stelle man solche zunächst her, und verfahre im Uebrigen wie vorher. Was hier für die Behandlung der Brüche gelegentlich ihrer Addition gesagt worden, gilt beziehungsweise auch in der Subtraction.

Beispiele.

A) zu addiren:	537	Ctr.	19	℔	$7\frac{3}{4}$	Loth,
	36	=	57	=	$8\frac{7}{12}$	=
	3	=	25	=	$27\frac{5}{6}$	=
	127	=	36	=	$23\frac{1}{2}$	=
	10	=	40	=	9	=
	—	=	16	=	—	=

Man suche die kleinste Zahl, von der jeder Nenner vorstehender 4 Brüche ein Faktor ist, und die man bei einiger Uebung ohne Rechnen erkennen kann, so hat man:

$$\text{Nenner: } \overbrace{2 - 4}^{4} \overbrace{- 6}^{12} - 12$$

$$\begin{array}{r|l|l} 2 & 4 & 2 \\ & 4 & \\ \hline & = & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} 4 & 6 & 1 \\ & 4 & \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ & 4 & \\ \hline & = & \end{array} \qquad \text{hiefür die Zahl } 12$$

Solche nimmt man nun als gemeinschaftlichen Nenner an, dividirt sie mit jedem einzelnen Nenner und multiplicirt mit dem erhaltenen Quotienten den Zähler des betreffenden

Bruches, so erhält man die neuen Zähler, und die Addition kann vollzogen werden:

557 Ctr.	19 ℔	$7\frac{9}{12}$ Loth		
36 "	57 "	$8\frac{7}{12}$ "		$\frac{32}{12}$ Loth =
3 "	25 "	$27\frac{10}{12}$ "		$2\frac{8}{12} = 2\frac{2}{3}$ Loth
127 "	36 "	$23\frac{6}{12}$ "		
10 "	40 "	9— "		
— "	16 "	— "		
714 Ctr.	87 ℔	$12\frac{2}{3}$ Loth.		

Den Ctr. zu 108 ℔ und 1 ℔ zu 32 Loth angenommen. Wären es Centner von 100 ℔, so hätte man die Summe von: 714 Ctr., 95 ℔, $12\frac{2}{3}$ Loth.

B) Zu subtrahiren:

256 Thlr.	29 Mgr.	$4\frac{3}{4}$ Pf.	Minuend	
127 "	32 "	$6\frac{1}{4}$ "	Subtrahend	
108 Thlr.	32 Mgr.	$6\frac{1}{4}$ Pf.		

1 Thlr. = 1 Thaler = 36 Mariengroschen;
1 Mgr. = 1 Mariengroschen = 8 Pfennig (Pf.)

§. 191.

Nro. 1. Soll irgend eine benannte Zahl mit einem Bruche multiplicirt werden, so suche man zunächst das Produkt aus dem Zähler und dividire solches hierauf mit dem Nenner des Bruchs; z. B. 98 fl. 47 kr. $5\frac{5}{6}$ Heller mit $\frac{3}{8}$ zu multipliciren, wird ausgeführt:

98 fl. 47 kr. $5\frac{5}{6}$ hl.
3

294 — 141 — $15\frac{15}{16}$ =
296 — 23 — $5\frac{1}{2}$: 8 =
37 — 2 — $(1\frac{1}{2} + \frac{1}{16})$ hl. =
37 fl. 2 kr. $1\frac{9}{16}$ hl.

Nro. 2. Wenn ein Geldwerth des 24 fl. Fußes mit: 3, 5, 6, 10, 12, 15, 20 zu multipliciren ist, so lassen sich

vortheilhafte Abkürzungen anwenden. Der Faktor 3 giebt, mit einer Hellerzahl multiplicirt, so viel halbe Kreuzer als solche Einheiten enthält; weil es gleichgültig ist, ob man auch sagt, 3 Heller oder $\frac{1}{2}$ Kreuzer sollen mit irgend einer Zahl multiplicirt werden, welche vorher zu den Hellern gehört hat. Ebenso verhält es sich, wenn Kreuzer mit 3 zu multipliciren sind, was soviel ist, als $\frac{1}{20}$ fl. soll mit der vorhin Kreuzer vorstellenden Zahl multiplicirt werden; das Produkt der beiden Zahlen giebt 20tels Gulden. Mit dem Faktor 5 eine Kreuzerzahl vermehrt, entstehen so viel 12tels Gulden, als sie Einheiten hat. Multiplicirt man mit 6, so erhält man aus dem Produkt der Heller so viel Kreuzer als derselben Zahl Einheiten anzeigt, und aus dem Produkt der Kreuzer so viel 10tels Gulden als die Kreuzerzahl Einheiten hat. Die Beschaffenheit der Produkte mit den übrigen genannten Faktoren, in Beziehung auf die Werthe der Einheiten höherer Ordnungen, kann man sich in dem angegebenen Sinne selbst ableiten. Es kommt hiebei nur darauf an, daß der Multiplicator entweder ein Faktor oder ein Vielfaches von der Anzahl der Einheiten ist, welche erforderlich sind, eine Einheit der nächst höhern Ordnung zu bilden, daraus geht hervor, daß derartige Vortheile bei jeder beliebigen Maaßeintheilung unter den besagten Umständen in Anwendung gebracht werden können. Beispiele werden dieses deutlicher machen:

(25 fl. 34 kr. $4\frac{3}{7}$ Heller) $\times$ 3 =
76 fl. 44 kr. $\frac{9}{7}$ Heller =
76 fl. 44 kr. $1\frac{2}{7}$ Heller,

denn 4 Heller mal 3 oder 4 $\times$ $\frac{1}{2}$ kr. machen 2 Kreuzer; 20 geht in 34 kr. 1 fl. mal und bleibt zum Rest 14 $\times$ 3 = 42 kr., zu denen die vorigen 2 kr. addirt werden müssen, woraus man 44 kr. erhält; 3 . 25 fl. und 1 fl. dazu, giebt 76 fl.

Nro. 3. (38 fl. 13 kr. 3 hl.) $\times$ 5 =
191 fl. 7 kr. 3 hl.

Es geht 12 in 13 ein Gulden mal und bleibt $\frac{1}{12}$ fl. =

5 kr. übrig, welche mit den aus dem Hellerprodukt erhaltenen 2 kr. zusammen 7 kr. ausmachen.

Nro. 4. (103 fl. 50 kr. 4 hl.) × 6 =
623 fl. 4 kr.

4 Heller mit 6 multiplicirt ist ebenso viel, als 6 Heller oder 1 kr. mit 4, daher 4 kr. entstehen; 50 kr. × 6 oder $50 \times \frac{1}{10}$ fl. $= \frac{5|0}{1|0} = 5$ fl.

Nro. 5. (43 fl. 9 kr. 3 hl.) × 10 =
5
431 fl. 30 kr. =

431 fl. 35 kr. Hier sind 3 hl. $= \frac{1}{2}$ kr., daher $10 \times \frac{1}{2}$ kr. $= 5$ kr.; 10×9 kr. $= \frac{1}{6}$ fl. $\times 9 = 1\frac{1}{2}$ fl. $= 1$ fl. 30 kr.

Wäre 7 fl. 45 kr. 4 hl. mit 60 zu multipliciren, so ist 60×4 hl. $= \frac{60 \times 4}{6}$ kr. $= 10 \times 4 = 40$ kr.; ferner 60×45 kr. $= \frac{60 \cdot 45}{60}$ fl. $= 45$ fl.; deßhalb das Produkt $= 465$ fl. und 40 kr.

Nro. 6. Den sächsischen Thaler zu 24 guten Groschen und den guten Groschen zu 12 Pfennigen angenommen, ist:

(14 Thlr. 16 Gr. $7\frac{2}{3}$ Pf.) × 12 =
(14 . 12 + $\frac{16}{2}$) Thlr. und $7\frac{2}{3}$ GGr. =
176 Thlr. 7 GGr. 8 Pfennig.

Nro. 7. Den preußischen Thlr. zu 30 Silbergroschen, und den Silbergroschen zu 12 Pfennigen gerechnet, ist:

(9 Thlr. 24 S.Gr. $9\frac{3}{5}$ Pf.) × 15 =

$(9 \times 15 + \frac{24}{2})$ Thlr. $+ \frac{15 \cdot 9 + 9}{12}$ Silb.Gr. =

147 Thlr. $+ \frac{15 \cdot 3 + 3}{4}$ GGr. $= 147$ Thlr. 12 GGr.

Nro. 8. Iſt aber ein Werth mit irgend einer Zahl zu multipliciren, welche kein Faktor von dem Theiler derſelben iſt, ſo nehme man entweder die nächſt niedere oder nächſt höhere Zahl von der erforderlichen Eigenſchaft, und verbinde ſolche mit der Ergänzung oder Differenz zu dem gegebenen Multiplicator. Man erhält auf dieſe Art eine Zahl von zwei Gliedern, mit deren jedem die benannte Größe multiplicirt wird; z. B.

(33 fl. 19 kr. $3\frac{1}{2}$ hl.) $\times$ 17 =
(33 = 19 = $3\frac{1}{2}$ hl.) $\times$ (12 + 5) =
(33 fl. 19 kr. $3\frac{1}{2}$ hl.) $\times$ 12 + (33 fl. 19 kr. $3\frac{1}{2}$ hl.) $\times$ 5 =
399 fl. 55 kr.
166 = 37 = $5\frac{1}{2}$ hl.

566 fl. 32 kr. $5\frac{1}{2}$ hl.

Nro. 9. Man hätte auch ſtatt 17 ſetzen können (18—1), was noch bequemer iſt, da 18 als Heller genommen = 3 kr., und für Kreuzer geſetzt $\frac{3}{10}$ fl. macht; daher: (33 fl. 19 kr. $3\frac{1}{2}$ hl.) $\times$ (18—1) =
599 fl. 52 kr. 3 hl.
— 33 = 19 = $3\frac{1}{2}$ =

Produkt = 566 fl. 32 kr. $5\frac{1}{2}$ hl.

Nro. 10. Es heiße, der Werth 19 fl. 27 kr. 3 hl. = A, welcher mit 43 multiplicirt werden ſolle, ſo kann man für 43 = (1 + 6 + 6 + 30) ſetzen; daher (19 fl. 27 kr. 3 hl.) $\times$ (1 + 6 + 6 + 30) und
1 . A = 19 fl. 27 kr. 3 hl.
6 . A = 116 = 45 = —
6 . A = 116 = 45 = —
30 . A = 583 = 45 = —

Produkt = 836 fl. 42 kr. 3 hl.

Nro. 11. Wenn die Zahl, womit eine zuſammengeſetzte Größe multiplicirt werden ſolle, ſehr groß iſt, ſo zerlege man letztere ſelbſt in ihren Gliedern, ſtatt wie vorher den Multiplicator, in ſolche Theile, daß ſich immer ein folgendes Produkt aus dem vorhergehenden, entweder durch Addition, Subtraction, Multiplication oder Diviſion, ableiten läßt.

Z. B. 319 fl. 23 kr. 5 hl. mit 2304 zu multipliciren, kann geſetzt werden:

[(100 + 100 + 100 + 10 + 9) fl. (6 + 6 + 6 + 6 − 1) kr. (6 − 1) Hlr.] × 2304.

Jedes Glied mit 2304 multiplicirt und die Summe der Produkte genommen, giebt:

100 fl.	× 2304	=	230400	fl.
100 =	= =	=	230400	=
100 =	= =	=	230400	=
10 fl.	× 2304	=	23040	=
9 =	= =	=	20736	=
6 Kr.	× 2304	=	230 fl. 24	kr.
6 =	= =	=	230 = 24	=
6 =	= =	=	230 = 24	=
(6 − 1) =	= =	=	192 = —	
(6 − 1) Hl.	× 2304	=	32 = —	
Total-Produkt		=	735891 fl. 12	kr.

Um 9 fl. × 2304 zu erhalten, darf man nur von 23040 fl. dem zehnfachen Produkte das einfache 2304 fl. abziehen. — Das Produkt (6 − 1) kr. × 2304 iſt gleich 6 × 2304 kr. − 2304 kr.: da aber der erſtere Werth = 230 fl. 24 kr., und der Subtrahend = 38 fl. 24 kr., ſo iſt die angezeigte Differenz = 192 fl. Ein Heller iſt der ſechste Theil eines Kreuzers, daher (6 − 1) Heller $= \frac{(6-1)\text{ kr.}}{6}$; wodurch $\frac{192\text{ fl.}}{6} = 32$ fl. erhalten wird.

Nro. 12. In sächsischem Gelde seyen 19 Thlr. 17 Gr. $9\frac{1}{2}$ Pf. gegeben, man soll das 1818fache dieser Summe finden.

Auflösung: (19 Thlr. 17 GGr. $9\frac{1}{2}$ Pf.) × 1818 = [(10 + 9) Thlr. + (8 + 8 + 1) GGr. + (6 + 3 + $\frac{1}{2}$) Pf.] × 1818; die einzelnen Produkte entwickelt:

10 Thlr.	× 1818	=	18180	Thlr.		
9 =	= =	=	16362	=		
8 Gr. = $\frac{1}{3}$ Thlr.	× 1818	=	606	=		
8 =	= =	=	606	=		
1 =	× 1818	=	75	=	18	Gr.
6 Pf.	= =	=	37	=	21	=
3 =	= =	=	18	=	22	= 6 Pfennig
$\frac{1}{2}$ =	= =	=	3	=	3	= 9 =

Prdkt (19 Thlr. 17 Gr. $9\frac{1}{2}$ Pf.) × 1818 = 35889 Thlr. 17 Gr. 3 Pf.

Nro. 13. Bei der württembergischen Landesvermessung wird die Taration des Aufnahms- und Zeichnungsverdienstes einer Flurkarte auf eine Weise behandelt, die eine große Unwissenheit in der Größenlehre verräth; besonders da noch keine allgemeine Formel für den Werth der zu Grunde gelegten Flächeneinheit von einem Morgen gefunden werden konnte, wenn man auch davon absehen will, daß diese Einheit zu klein für mathematische Layen ist, um die verschiedenartigen Rücksichten, die auf einer Fläche von $416\frac{2}{3}$ Morgen §. 184 B. 2 in gedachter Beziehung zu nehmen sind, mit Schärfe in sich aufnehmen zu können.

Das Verfahren, welches angewendet wird, die Vergütung der Arbeiten zu bestimmen, kann nur ein schwankendes genannt werden, und ist mit dem Bestreben zu vergleichen, einen auf die Spitze gestellten Kegel in Ruhe zu bringen. Je nachdem nun eine Neigung sich dazu gesellt, muß dasselbe jederzeit zum Nachtheile des Arbeiters gereichen.

Daß es nicht so unbedeutend ist, ob der betreffende Ver-

dienst für einen Morgen um einige Kreuzer vermehrt oder vermindert werde, wie man so gerne behaupten hört, sollen nachstehende Berechnungen zeigen.

Man nehme an, eine vollendete Flurkarte von 416⅔ Morgen seye durch einen Mann, welcher geodätische Arbeiten zu schätzen weiß, d. h., welcher im Stande wäre, eine solche selbst brauchbar zu fertigen, nach allen Rücksichten, worunter verstanden werden: die Anzahl der in selbiger vorkommenden Grundstücke und Objekte, die Menge der Durchschnittspunkte ihrer Gränzlinien, die Beschaffenheit des Terrains, besonders der Grad der Neigung schiefer Flächen gegen den Horizont, die Kulturarten, die Ausführung der Zeichnung, die Zahl und Richtigkeit der gegebenen trigonometrischen und geometrischen Anhaltspunkte, die Anzahl der Lokalnamen und endlich die Preise der Lebensmittel an dem bedingten Aufenthaltsorte, untersucht und für den beabsichtigten Zweck als untadelhaft gefunden worden, so daß er nach seiner redlichen Ueberzeugung eine Vergütung für diese Arbeit, im Betrage von 230 fl., als billig findet, so könnte man nun auch berechnen, wenn es je nöthig wäre, wie viel im Durchschnitte ein Morgen dieses Blattes kosten würde. Um der möglichen Behauptung, man sey dieses nicht im Stande, vorzubeugen, wollen wir die Berechnung ausführen:

$$230 \text{ . } 60 \text{ kr. : } 416\tfrac{2}{3} \text{ Morgen} = 230 \text{ . } 60 : \frac{1250}{3} =$$

$$230 \text{ . } 60 \times \frac{3}{1250} = 46 \text{ . } 6 \times \frac{3}{25} = \frac{828}{25} = 33\frac{3}{25} \text{ kr.}$$

für den Durchschnittspreis eines Morgens.

Angenommen aber, die Einschätzung würde durch einen Mann besorgt, welchem sowohl eine systematische Beurtheilung, als auch die Sprache der Größenlehre, daher natürlich das ganze Geschäft selbst fremd ist, der aber die Kühnheit hat, mit der Miene des Sehers seine beliebigen Einfälle für Orakelsprüche auszugeben, wogegen kein Einwurf

Statt finden darf, was leider hie und da gelingen könnte, und würde den Verdienst dem Morgen nach zu 19 kr. einschätzen, legt auch noch auf eine sichtbare Anwandlung von angeborner Herzensgüte, welche sich durch die harte Dienstpflicht nie ganz unterdrücken läßt, $\frac{1}{2}$ kr. zu, so daß also 1 Morgen im Preise auf $19\frac{1}{2}$ kr. stehen würde, so kann man durch Multiplication mit $416\frac{2}{3}$ Morgen erfahren, wie hoch die Vergütung für die ganze Arbeit auf diese Art wäre und durch Vergleichung der eigentliche Verlust des Arbeiters. Kehrt man nun die Benennung der zwei Zahlen um und denkt sich, es sollen $416\frac{2}{3}$ kr. mit $19\frac{1}{2}$ multiplicirt werden, was ja ganz gleichgültig ist und verwandelt die Kreuzer in Gulden u. s. f., so hat man:

(6 fl. 56 kr. 4 Heller) × (12 + 6 + 1 + $\frac{1}{2}$)

mit 12	=	83 fl.	20 kr.	
= 6	=	41 =	40 =	
= 1	=	6 =	56 =	4 hl.
= $\frac{1}{2}$	=	3 =	28 =	2 =
Summe	=	135 fl.	25 kr.	

Der Arbeiter würde sonach in einen Nachtheil von 94 fl. 35 kr. gesetzt worden seyn.

Hätte der Morgen nur eine Schätzung von $17\frac{3}{4}$ kr. erhalten, worin anscheinend keine bedeutende Verminderung des Verdienstes liegt, so wäre:

(6 fl. 56 kr. 4 hl.) × (6 + 6 + 6—1 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$)

mit 6 multipl.	=	41 fl.	40 kr.	
= 6 =	=	41 =	40 =	
= 6—1 =	=	34 =	43 =	2 hl.
= $\frac{1}{2}$ =	=	3 =	28 =	2 =
= $\frac{1}{4}$ =	=	1 =	44 =	1 =
Summe	=	123 fl.	15 kr.	5 hl.

Solche wäre wieder um 12 fl. 9 kr. 1 Heller niedriger als die nächst vorher, und um 106 fl. 44 kr. 1 hl. geringer als die Anfangs angenommene billige Einschätzung. Jeder

Heller auf den Morgen macht für ein ganzes Blatt $416\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}$ kr. = $\frac{1250}{18} = 69\frac{4}{9}$ kr. = 1 fl. 9 kr. $2\frac{1}{3}$ Heller.

§. 192.

A) Ist eine mehrgliedrige Größe mit einer gemischten Zahl oder einem uneigentlichen Bruche zu multipliciren, so wäre der einfachste Weg, beide Faktoren in Dezimalbrüche zu verwandeln und aus diesen das Produkt zu suchen. Hierauf lassen sich aus diesem Produkt wieder leicht die Maaße in der ursprünglichen Eintheilung ableiten. Wir wollen hier ein solches Verfahren mit einem der vorigen zusammenstellen und dazu ein Beispiel in englischem Gelde wählen. Man solle nämlich 29 ℔ Sterling, 15 Schilling, $9\frac{4}{5}$ Pences mit $236\frac{7}{11}$ multipliciren.

Die Eintheilung dieses Geldes ist folgende:

℔ Sterling	Schilling	Pences
1	20	240
	1	12

Man lasse die Multiplication nach der bereits erklärten Art vorangehen und setze zu diesem Behufe die Geldsumme = A, so ist:

(A = 29 ℔ St. 15 ß $9\frac{4}{5}$ Pences) $\times$ $236\frac{7}{11}$ =

$236\,A =$

29 ℔ × 236 =	472			℔
	2124			℔
10 ß × 236 =	118			
5 " " " =	59			
6 p. × 236 =	5	18	ß *)	
3 p. × " =	2	19		
$\frac{1}{5}$ p. × 236 =	—	3	11,2	Pences
$\frac{3}{5}$ p. × 236 =	—	11	9,6	"

$\frac{7}{11}\,A =$

$\frac{1}{11}$ A =	2	14	1,98	"
$\frac{6}{11}$ A =	16	4	11,89	"
Produkt =	7049	℔ 11	ß 10,67	Pences

*) Es sind 6 Pences = ½ Schill. Aber 5 ß sind $^{10}/_{2}$ ß; daher

B) Um nun auch diese Multiplication durch Dezimalbrüche auszuführen, verwandle man in solche beide Faktoren. Der Faktor (29 ℔ St. 15 ß $9\frac{4}{5}$ p.) wird auf folgende Art entwickelt:

1) $9\frac{4}{5}$ Pences $= 9 + \frac{4}{5} = 9 + 0{,}8 = 9{,}8$ Pences;

2) 15 ß $+ 9{,}8$ P. $= 15$ ß $+ \frac{9{,}8}{12}$ ß $= 15{,}8167$ ß;

3) 29 ℔ $+ 15{,}8167$ ß $= 29$ ℔ $+ \frac{15{,}8167}{20}$ ℔ $= 29{,}790833$ ℔

Es ist ferner $\frac{7}{11} = 0{,}6363636\ldots$ daher der zweite Faktor der Multiplication $236\frac{7}{11} = 236{,}6363636\ldots$

Nun stelle man das Produkt aus den beiden Dezimalbrüchen her:

$$\begin{array}{r|l}
236{,}63636 & 36 \\
29{,}79083 & 3 \\
\hline
4732{,}72727 & \\
2129{,}72727 & \\
165{,}64545 & \\
21{,}29727 & \\
18931 & \\
710 & \\
\hline
7049{,}59367 & \text{℔ Sterling. Die Dezimaltheile mit} \\
20 & \text{multiplicirt, giebt:} \\
\hline
11{,}87340 & \text{ß. Diese Dezimaltheile wieder mit} \\
12 & \text{multipl. wird} \\
\hline
174680 & \\
87340 & \\
\hline
10{,}48080 & \text{Pences.}
\end{array}$$

Es ist daher das gesuchte Resultat = 7049 ℔ St., 11 ß, 10,48 Pences, welches von dem vorigen nur um 0,19 P. abweicht.

C) Wenn irgend ein Werth durch eine gemischte Zahl, oder einen uneigentlichen Bruch dividirt werden solle, so ver-

---

½ ß oder 6 p. der 10te Theil von 5 ß. Ebenso das Produkt von 6 p. mit 236 der 10te Theil von dem Produkte 5 ß × 236. (Das Zeichen ß bedeutet Schilling.)

wandelt sich nach der Regel für die Division mit Brüchen, der Divisor in einen Multiplicator, wenn man Zähler und Nenner desselben unter sich verwechselt. Diesen Multiplicator zerlege man nun, wenn es angeht, so, daß die Rechnung geschmeidig wird. Im andern Falle könnte man nichts thun, als die gegebene Größe mit dem Zähler des Bruchs multipliciren und das Produkt wieder mit dem Nenner dividiren *); z. B.:

(37 Thlr. 9 GGr. $8\frac{1}{2}$ Pf.) : $14\frac{2}{5}$ =
(37 = 9 = $8\frac{1}{2}$ =) : $\frac{72}{5}$ =
(37 = 9 = $8\frac{1}{2}$ =) × $\frac{5}{72}$ =
(37 = 9 = $8\frac{1}{2}$ =) × ($\frac{1}{18}$ + $\frac{1}{18}$: 4) =
2 Thlr. 1 GGr. $10\frac{17}{36}$ Pfennig und
— 12 = $5\frac{61}{88}$

Summe = 2 Thlr. 14 GGr. $4\frac{1}{32}$ Pfennig. (Quotient.)

§. 193.

Ist entweder der Nenner oder der Zähler des Bruchs, mit welchem eine vielnamige Zahl multiplicirt werden solle, eine zur Zerlegung in Faktoren unbequeme Zahl, oder der Multiplicator ein weitläufiger Dezimalbruch, so verwandelt man solchen, der jedenfalls hergestellt wird, im Falle der gegebene Werth in sächsischen Thalern, Groschen, Mariengroschen, Pfennigen oder rheinischen Gulden, Kreuzern u. s. w. besteht, in 12tel, 144tel u. s. w., und bezeichnet die Anzahl der Multiplicationen der 12 durch sich selbst folgendermaaßen: $1 \times 12 = 12^1$, $12 \times 12 = 12^2$, $12 \times 12 \times 12 = 12^3$ u. s. w.

a) Nimmt man nun an, es solle A = 29 Thlr. 14 GGr. und 8,3 Pf. mit $\frac{37}{59}$ multiplicirt werden, so verwandle man zuvörderst letztern Bruch in einen Dezimalbruch und nach diesem durch wiederholte Multiplicationen mit 12 in Duodezimaltheile. Demzufolge ist:

*) Oder auch die Division mittelst Dezimalbrüche verrichten.

$$
\begin{array}{r|l|l}
59 & 370 & 0{,}62711864 = 0{,}62712, \\
 & 354 & \\
\hline
 & 160 & \\
 & 118 & \\
\hline
 & 420 & \\
 & 413 & \\
\hline
 & 70 & \\
 & 59 & \\
\hline
 & 110 & \\
 & 59 & \\
\hline
 & 510 & \\
 & \text{ꝛc.} &
\end{array}
$$

wenn man sich mit der 5ten Dezimalstelle, wie hier begnügen kann, und solche um 1 vermehrt, weil die weitere Ziffer 8 größer als die Hälfte von der Einheit derselben ist.

Den Dezimalbruch 12theilig gemacht:

$$
\begin{array}{lcll}
0{,}62712 \times 12 = 7{,}52544 & : & 12^1 \\
0{,}52544 \times 12 = 6{,}30528 & : & 12^2 \\
0{,}30528 \times 12 = 3{,}66336 & : & 12^3 \\
0{,}66336 \times 12 = 7{,}96 & : & 12^4 \\
0{,}96 \times 12 = 11{,}52 & : & 12^5
\end{array}
$$

so kann man hieraus ableiten:

$$\frac{37}{59} = \frac{7}{12^1} + \frac{6}{12^2} + \frac{3}{12^3} + \frac{7}{12^4} + \frac{11\frac{1}{2}}{12^5};$$

indem man die durch Multiplication mit 12^1, 12^2, 12^3 u. s. w. erhaltenen Werthe wieder durch die gleichen Faktoren dividirt, wodurch der Bruch nicht geändert wird. Mit den erhaltenen Gliedern multiplicire man nun nach und nach den gegebenen Geldwerth in sächsischem Thalerfuß, so erhält man für

	A =	29	Thlr.	14	GGr.	8,3	Pf.	
$\frac{6}{12^1}A = \frac{1}{2}A$	=	14	=	19	=	4,15	=	= B
$\frac{1}{12^1}A = \frac{1}{6}B$	=	2	=	11	=	2,69	=	= C
$\frac{6}{12^2}A = \frac{1}{12}B$	=	1	=	5	=	7,346	=	= D
$\frac{3}{12^3} = \frac{1}{4 \cdot 12^2} = \frac{1}{24}D$	=	=	=	1	=	2,806	=	= E
$\frac{7}{12^4} = \frac{7}{12 \cdot 13^3} = \frac{7}{36}E$	=	=	=	=	=	2,879	=	= F
$\frac{11}{12^5} = \frac{11}{12 \cdot 12^4} = \frac{11}{84}F$	=	=	=	=	=	0,377	=	= G
$\frac{1}{22}G =$		=	=	=	=	0,017		
Produkt	=	18	Thlr.	13	GGr.	8,265	Pfennig	

b) Will man die vorgegebene Größe unmittelbar mit dem Zähler des Multiplicators multipliciren und mit deſſen Nenner dividiren, ſo verwandle man dieſelbe vorerſt in einen Dezimalbruch für Thaler; wornach:

14 GGr. 8,3 Pf. $= \left(14 + \frac{8,3}{12}\right)$ GGr. $= 14,69167$ GGr. und

29 Thlr. $+$ 14,69167 Gr. $= 29 + \frac{14,9167}{24} = 29,612153$ Thlr.

und daher (29 Thlr. 14 GGr. 8,3 Pf.) $\times \frac{37}{59} = 29,612153 \times \frac{37}{59}$ Thlr.

$$
\begin{array}{r}
29,612153 \\
37 \\
\hline
888,36459 \\
207,285071 \\
\hline
59 \mid 1095,649661 \mid 18,570333 \text{ Thaler} \\
59\,. \\
\hline
505 \\
472 \\
\hline
336
\end{array}
$$

Die Bruchtheile 0,570333 . . .

mit $24 = 4 \times 6$ multiplicirt und zu Groſchen gemacht, giebt $2,28133^2 \times 6 = 13,687992$ Groſchen. Die Dezimaltheile der Groſchen durch Multiplication mit $12 = (10 + 2)$ in Pfennige verwandelt, erhält man $6,87992 + 1,375984 = 8,2559$ Pfennig. Das aus der Multiplication mit dem Bruche hervorgegangene Produkt iſt nun $=$ 18 Thlr. 13 GGr. 8,256 Pfennig beinahe wie vorhin.

Ein Beiſpiel im 24 Guldenfuß.

c) A $=$ 327 fl. 24½ kr. ſoll mit $\frac{113}{355}$ multiplicirt werden. — Nach der erſten Auflöſungsart des vorigen Beiſpiels wird $\frac{113}{355}$ in einen Dezimalbruch $= 0,31831^2$ verwandelt und aus dieſem Duodezimaltheile gebildet:

$0,31831^2 \times 12 = 3,81972$	$0,83664 \times 12 = 10,03968$
$0,81972 \times 12 = 9,83664$	$0,03968 \times 12 = 0,47616$

demnach iſt:

$$(327 \text{ fl. } 24\tfrac{1}{2} \text{ kr.}) \times \left(\frac{113}{355} = \frac{3}{12} + \frac{9}{12^2} + \frac{10}{12^3} + \frac{48/100}{12^4}\right) =$$

$$\frac{3}{12} A = \frac{1}{4} A = 81 \text{ fl. } 51{,}125 \text{ kr. (B)}$$

$$\frac{3}{12^2} A = \frac{1}{12} B = 6 \text{ " } 49{,}260 \text{ " (C)}$$

$$-\frac{6}{12^2} A = 2\,C = 13 \text{ " } 38{,}520 \text{ " (D)}$$

$$-\frac{6}{12^3} A = \frac{1}{12} D = 1 \text{ " } 8{,}210 \text{ " (E)}$$

$$\frac{3}{12^3} A = \frac{1}{2} E = — \text{ " } 34{,}105 \text{ " (F)}$$

$$\frac{1}{12^3} A = \frac{1}{3} F = — \text{ " } 11{,}368 \text{ " (G)}$$

$$\frac{48/100}{12 \cdot 12^3} = \frac{48}{12 \cdot 12^3 \cdot 100} = \frac{1}{25} G = 0{,}455$$

Produkt = 104 fl. 15,043 kr.

Probe auf dem andern Wege.

Es ist:

$327{,}408333 \ldots$ fl. $\times$ (113 = 100 + 10 + 3) = $36997{,}1417$ fl.

und $\frac{36997{,}1417}{355} = 104{,}2173$ fl. = 104 fl. 15,04 kr.

d) Ein verwickelter Divisor läßt sich durch nachstehendes Verfahren auf eine bequeme Form bringen: Es seye eine Größe A durch $365\frac{1}{4}$ zu dividiren, so ist $A : 365\frac{1}{4} = A : \frac{1461}{4} = \frac{4\,A}{1461}$. Multiplicirt man die Zähler und Nenner dieses Bruches mit 12×12, so ist $\frac{A \times 4 \times 144}{1461 \times 12^2} = \frac{A}{12^2} \times 0{,}39425$. Den Dezimalbruch in Duodezimaltheile aufgelöst, wird: $0{,}39425 = \frac{A}{12^2} \times \left(\frac{4}{12} + \frac{8}{12^2} + \frac{9\frac{1}{4}}{12^3}\right)$; daher:

$\frac{A}{12^2} \times 0{,}39425 = \frac{A}{12^2} \times \left(\frac{4}{12} + \frac{8}{12_2} + \frac{9\frac{1}{4}}{12^3}\right)$. Nimmt man nun an, es seye A = 5846 fl. 35 kr. 5 Heller, so ist:

$\frac{A}{12}$ = 187 fl. 12 kr. 5,917 Heller (B)

$\frac{A}{12^2} = \frac{1}{12}$ B = 40 = 36 = 0,493 = (C)

$\frac{4}{12}$ C = $\frac{1}{3}$ C = 13 = 32 = 0,164 = (D)

$\frac{8}{12^2}$ C = $\frac{4}{6.12}$ C = $\frac{1}{6}$ D = 2 = 15 = 2,027 = (E)

$\frac{8}{12^3}$ C = $\frac{1}{12}$ E = — = 11 = 1,669 = (F)

$\frac{1}{12^3}$ C = $\frac{1}{8}$ F = — = 1 = 2,459 = (G)

$\frac{1}{12^3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ G — = — = 2,115

Zusammen = 16 fl. — 2,434 Heller.

Nach der gewöhnlichen Art würde man:

(5846 fl. 35 kr. 5 Heller) : 365,25 gesetzt und zunächst mit dem Divisor in die Guldenzahl dividirt haben, woraus der Quotient 16 fl. und ein Rest 200 entstanden wäre. Diesen Rest mit 60 zu Kreuzer gemacht und mit dem nämlichen Divisor dividirt, nachdem man zuvor die gegebene Anzahl Kreuzer addirt hat, giebt für Kreuzer keinen Quotienten, daher der ganze letzte Dividend als Rest verbleibt, den man nun durch Multiplication mit 6 zu Hellern macht und dem Produkt die gegebene Anzahl Heller beizählt. Die erhaltene Summe dividire man wieder mit dem gleichen Divisor. Diese ganze Rechnung wäre:

36525 | 584600 | 16 fl.
36525
219350
219150
Rest = 200 fl. diesen mit 60 multiplicirt
60
12000 kr.
die gegebenen = 3500 addirt
15500 Quotient = 0 kr.

15500
mit 6 zu Heller
93000
hiezu die gegebenen 500 addirt, giebt:
93500 | 2,56 Heller
73050
204500
182625
218750
219150

zusammen = 16 fl. 0 kr. 2,56 Heller.

c) Im Falle eine vielnamige Größe A mit einer sehr großen und gemischten Zahl zu multipliciren wäre, z. B. mit $7853\frac{367}{836\,4}$, so zerlege man diesen Multiplicator, wenn es anders dem Zahlensysteme der gegebenen Größe A nicht zuwiderläuft, in solche Faktoren, die sowohl Vielfache als Theile von 12 sind. Die ganze Zahl 7853 wird aus Produkten und der Bruch $\frac{367}{836\,4}$ aus Quotienten der Zahl 12 bestehen müssen; denn es ist:

$$1728 = 654 \times 12 + 5 = 54 \times 12 \times 12 + 6 \times 12 + 5 = 5 + 6 \times 12 + 6 \times 12 \times 12 + 4 \times 12 \times 12 \times 12 = 5 + 6 . 12 + 6 . 12^2 + 4 . 12^3$$

und die Duodezimaltheile des Bruches sind:

$\frac{5}{12} + \frac{5}{12^2} + \frac{2}{12^3} + \frac{10}{12^4} + \frac{1}{12^5} + \frac{1}{12^6}$ ꝛc. Die Fortsetzung dieser Bruchreihe richtet sich nach dem Grade der Genauigkeit, den man erreichen will.

Ist nun A = 15 fl. 26 kr. $4\frac{1}{3}$ Heller, so setzt man für (15 fl. 26 kr. 4,333 .... hl.) $\times$ $7853\frac{367}{836\,4}$ = (15 fl. 26 kr. 4,333 hl.) $\times$

$$\left(5 + 6 . 12 + 6 . 12^2 + 4 . 12^3 + \frac{5}{12} + \frac{5}{12^2} + \frac{2}{12^3} + \frac{10}{12^4} + \frac{1}{12^5} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{12^6} \text{ ꝛc.}\right)$$

Man setze die Grundwerthe, aus welchen die übrigen leicht abgeleitet werden können, voraus:

$12\ A =$ 185 fl. 20 kr. 4 Heller

$\frac{1}{12} A =$ 1 = 17 = 1,3611 .... (a)

$\frac{1}{12^2} A = \frac{1}{12}\ a =$ 6 = 2,613 ... (b)

$\frac{1}{12^3} A = \frac{1}{12}\ b =$ 3,218 ... (c)

$\frac{1}{12^4} A = \frac{1}{12}\ c =$ 0,268 (d)

$\frac{1}{12^5} A = \frac{1}{12}\ d =$ 0,022

so erhält man für:

5 A	=	77 fl.	13 kr.	3,667 Heller
(6 . 12 .) A	=	1112 =	4 =	
(6 . 12^2) A	=	13344 =	48 =	
(4 . 12^3) A	=	106758 =	24 =	
5 . $\frac{1}{12}$ A	=	6 =	26 =	0,805 =
3 . $\frac{1}{12^2}$ A	=	— =	19 =	1,839 =
2 . $\frac{1}{12^3}$ A	=	— =	1 =	0,436 =
10 . $\frac{1}{12^4}$ A	=	— =	—	2,680 =
$\frac{1}{12^5}$ A	=	— =	—	0,022 =
Zusammen	=	121299 fl.	16 kr.	3,449 hl.

Probe mittelst Dezimalbrüchen.

15 fl. 26 kr. $4\frac{7}{3}$ hl. = 15,44537037

$7853\frac{3673}{8364}$ = 7853,439144

108117,5926
12356,2963
772,2685
46,3361
6,1781
4634
1390
35
6
1

121299,2762 fl.

0,2762 0,572
60 kr. 6

16,5720 kr. 3,432 Heller; demnach das Resultat = 121299 fl. 16 kr. und 3,43 Heller.

---

f) Wäre gefordert: 23 Centner (zu 100 ℔) 47 ℔ und $25\frac{7}{8}$ Loth mit $17899\frac{48}{57}\frac{7}{3}\frac{9}{2}$ zu multipliciren, so würde die Auflösung durch gewöhnliche Dezimalbrüche die einfachere seyn, da sich für die Gewichtseintheilung das Duodezimalsystem nicht eignet. Will man das Produkt bis zu 1000tel Centner richtig haben, so müssen jedem Faktor so viele Dezimalstellen über drei gelassen werden, als der andere in seiner ganzen Zahl Ziffern hat; wenn nämlich der betreffende Faktor ein continuirlicher Dezimalbruch ist. Es wird nun:

23 Ctr. 47 ℔ $25\frac{7}{8}$ Lth. = 23,47808594 Ctr.
$17899\frac{48}{57}\frac{7}{3}\frac{9}{2}$ = 17899,8511863

234780,8594
164346,6015
18782,4687
2113,0277
211,3028
18,7825
1,1739
235
23
18
2

420254,2433 Ctr.

ferner ist 0,2433 Ctr. = 24,33 ℔ und 0,33 ℔ = $10\frac{1}{2}\frac{1}{5}$ Loth, daher das Produkt = 420254 Ctr. 24 ℔ $10\frac{1}{2}\frac{1}{5}$ Loth.

---

§. 194.

Anwendung der arithmetischen Verhältnisse und Proportionen.

Ein arithmetisches Verhältniß, so wie überhaupt jede Größen-Vergleichung, kann nur zwischen gleichartigen Dingen Statt finden. Bei jedem arithmetischen Verhältnisse kommen drei Theile in Betracht, nämlich die zwei Glieder und ihre Differenz. Sind zwei von diesen Theilen gegeben, so kann man den dritten finden. Ist das vordere Glied des Verhältnisses größer als das zweite, so wollen wir die Differenz mit dem Zeichen $+$, im umgekehrten Falle aber mit $-$ bezeichnen.

1. Aufgabe. Das erste Glied eines arithmetischen Verhältnisses seye $= 12$, die Differenz $= +5$, man solle das zweite Glied finden.

Auflösung. Nenne man das zweite Glied einstweilen $= x$, so ist:

$$12 - x = +5; \text{ und}$$
$$12 - 5 = x = 7.$$

Setzt man diesen Werth statt x, so ist das vollständige Verhältniß $= 12 - 7$.

Wäre die Differenz $= -5$, so würde man erhalten:

$$12 - x = -5$$
$$12 + 5 = x = 17.$$

Diesen Werth in das arithmetische Verhältniß gesetzt, erhält man für solches: 12—17.

2. Aufgabe. Das zweite Glied eines arithmetischen Verhältnisses seye $= 23$ und die Differenz $= +8$; man soll das erste Glied finden.

Auflösung. Man nenne das unbekannte Glied $= x$ so ist:

$$x - 23 = 8$$
$$x = 23 + 8 = 31;$$

daher das vollständige Verhältniß $=$

$$31 - 23.$$

Nimmt man an, die Differenz seye $= -8$, so ist

$$x - 23 = -8$$
$$x = 23 - 8 = 15$$

und das Verhältniß wird $= 15 - 23$ seyn.

3. Aufgabe. Es ist ein arithmetisches Verhältniß $= 19 - 12$ gegeben, man soll die Differenz finden.

Auflösung. Die unbekannte Differenz $= x$ angenommen, ist: $19 - 12 = x = +7$.

4. Aufgabe. Die Differenz des arithmetischen Verhältnisses $7 - 25$ zu suchen.

Auflösung. Es ist nach dem Vorigen

$$7 - 25 = x = -18.$$

§. 195.

Beispiele.

1. Im Jahre 403 der christlichen Zeitrechnung plünderten die Westgothen unter Alarichs Anführung zum erstenmal Rom. — Im wievielten Jahre der Erbauung Roms geschah' dieß?

Rom wurde 754 Jahre vor Christus erbaut.

Auflösung. Man kann entweder setzen:

$$x - 403 = +754;$$
$$x = 754 + 403 = 1157 \text{ Jahr d. Erb. Roms}$$

oder: $403 - x = -754$, woraus

$$403 + 754 = x = 1157 \text{ J. R.}$$

2. 48 Jahre vor Christus wurde Pompejus von Julius Cäsar bei Pharsalus in Thessalien geschlagen. Im wievielten Jahre der Erbauung Roms geschah dieß?

Auflösung. Entweder:

$$754 - x = +48, \text{ woraus}$$
$$754 - 48 = 706 = x$$

oder: $x - 754 = -48$

$$x = 754 - 48 = 706 \text{ entsteht.}$$

3. Von einem Haufen Aepfel werden 114 Stück wegge-

nommen, und es bleiben noch 539 übrig, wie viel waren es im Ganzen?

Auflösung. Entweder:

$$x - 114 = 539$$
$$x = 539 + 114 = 653;$$

oder: $$114 - x = -539$$
$$539 + 114 = x = 653.$$

§. 196.

Die Glieder eines arithmetischen Verhältnisses, so wie die Differenz, können ächte Brüche, oder gemischte Zahlen seyn; z. B.

1. Aufgabe. Das zweite Glied x eines arithmetischen Verhältnisses zu finden, wenn das erste $= 6\frac{3}{7}$ und die Differenz $= +\frac{5}{8}$ ist.

Auflösung. Die Formel ist:

$$6\tfrac{3}{7} - x = \tfrac{5}{8}$$

beiderseits x addirt und $\frac{5}{8}$ abgezogen, wird:

$$6\tfrac{3}{7} - \tfrac{5}{8} = x$$

Nun mache man 6 Ganze zu Siebentel und bringe beide Brüche auf gleiche Benennung, so erhält man:

$$\frac{45}{7} - \frac{5}{8} = x = \frac{45 \times 8}{7 \times 8} - \frac{7 \times 5}{7 \times 8} = \frac{360-35}{56};$$

$$x = \frac{325}{56}.$$

Setzt man diesen Werth statt x, so ist das Verhältniß: $\frac{360}{56} - \frac{325}{56}$, worin wirklich die Differenz $\frac{35}{56} = \frac{5}{8}$ Statt findet.

2. Aufgabe. Von dem arithmetischen Verhältnisse: $9\frac{5}{9} - 3\frac{7}{10}$ die Differenz zu finden.

Auflösung: Man bringe die ganzen Zahlen auf gleiche Benennung mit den ihnen zugehörigen Brüchen, so hat

man; $\frac{86}{9} - \frac{37}{10}$. Diese Brüche unter sich auf gleiche Benennung gebracht und die Differenz $= x$ gesetzt, so ist;

$$\frac{86 \times 10}{9 \times 10} - \frac{9 \cdot 37}{9 \cdot 10} = \frac{860}{90} - \frac{333}{90} = x \text{ und}$$

$$x = \frac{527}{90} = 5\frac{77}{90} = 5{,}8555\ldots$$

Solches wird auch gefunden, wenn man die Brüche der Glieder schon Anfangs in Dezimalbrüche auflöst. Es ist ein solches Verfahren jederzeit vorzuziehen. Nach diesem wäre $9\frac{5}{9} = 9{,}555\ldots$ und $3\frac{7}{10} = 3{,}7$; daher das Verhältniß selbst: $9{,}555\ldots - 3{,}7 = x$ der Differenz $= 5{,}8555\ldots$

3. Aufgabe. Es ist das zweite Glied $= 13\frac{1}{5}$ und die Differenz $= + 3\frac{4}{11}$ gegeben, man soll das erste Glied des Verhältnisses finden.

Auflösung. $13\frac{1}{5} = 13{,}2$; $3\frac{4}{11} = 3{,}363636\ldots$, daher die Differenz des Verhältnisses

$x - 13{,}2 = 3{,}363636\ldots$, woraus man

$x = 13{,}2 + 3{,}3636\ldots = 16{,}563636\ldots$ findet.

§. 197.

Ein arithmetisches Verhältniß ändert sich nicht, wenn man die gleiche Zahl zu jedem Gliede addirt oder von jedem abzieht; denn die Differenz bleibt in solchen Fällen immer die nämliche. Z. B. es seye das arithmetische Verhältniß $15-37$ gegeben, so ist dessen Differenz $= -22$; addirt man zu beiden Gliedern die Zahl 5, so erhält man $(15+5) - (37+5) = 20 - 42$, worin die Differenz $= -22$.

Zieht man die Zahl 5 ab, so ist $(15 - 5) - (37 - 5) = 10 - 32$ mit der Differenz $= 22$.

§. 198.

Eine arithmetische Proportion behält ihre Richtigkeit so lange die Summe der beiden äußern Glieder gleich ist der

Summe der beiden mittlern. Dieſes findet bei folgenden Veränderungen der Glieder Statt:

1) wenn man die gleiche Zahl zu den zwei Gliedern eines ihrer Verhältniſſe addirt, oder von ſolchen abzieht. Es ſeye: $13 - 5 = 9 - 1$ gegeben, ſo kann man die Zahl 6 auf zweierlei Art addiren, entweder:

$$(13 + 6) - (5 + 6) = 9 - 1$$
$$19 - 11 = 9 - 1$$

oder:
$$13 - 5 = (9 + 6) - (1 + 6)$$
$$13 - 5 = 15 - 7$$

Würde man den Werth 1 abziehen, ſo hätte man entweder:

$$(13 - 1) - (5 - 1) = 9 - 1$$
$$12 - 4 = 9 - 1$$

oder:
$$13 - 5 = (9 - 1) - (1 - 1)$$
$$13 - 5 = 8 - 0$$

2) Wenn die gleiche Zahl zu dem erſten und dritten Gliede addirt oder von ſolchen abgezogen wird.

3) Wenn die gleiche Zahl zu dem zweiten und vierten Gliede addirt, oder von ſolchen abgezogen wird.

4) Wenn die nämliche Zahl entweder zu allen vier Gliedern addirt, oder von ihnen abgezogen wird.

5) Wenn alle Glieder mit einerlei Zahl multiplicirt werden.

6) Wenn alle Glieder mit derſelben Zahl dividirt werden. Endlich

7) Wenn die Glieder der gleichen Ordnung mehrerer arithmetiſcher Proportionen addirt werden; in dieſem Falle verhält ſich alſo: die Summe aller erſten Glieder zur Summe aller zweiten, wie die Summe der dritten Glieder zur Summe der vierten. Die Ausführung dieſer Fälle kann Jeder ſelbſt vornehmen.

§. 199.

Beiſpiele.

1) Emilie iſt nach 12 Jahren 19 Jahre alt, wie alt wird ſie nach 20 Jahren ſeyn?

Auflösung. Der Unterschied zwischen 12 und dem Alter von 19 Jahr, muß gleich seyn dem Unterschied zwischen 20 und dem gesuchten Alter von x Jahr; daher:

$$12 - 19 = 20 - x$$
$$12 + x = 19 + 20$$
$$x = 39 - 12 = 27 \text{ Jahre.}$$

2) Ein Kapitalist wurde von einem andern gefragt, wie groß sein baares Vermögen seye; er antwortete: so groß der Unterschied Ihres Vermögens von 12000 fl. und des Erbtheils, den sie noch erwarten und welcher 90,000 fl. beträgt, ist, ebenso groß ist der Unterschied meines anfänglichen Kapitals von 20400 fl. und meiner jetzigen Baarschaften. Wie groß war das baare Vermögen des Kapitalisten?

Auflösung. Der Kapitalist heiße A und der Fragende B, so steht das Vermögen des letztern mit der zu hoffenden Erbschaft in dem arithmetischen Verhältnisse 12000 — 90,000 und das frühere Kapital von A mit dessen gegenwärtigem Besitzthum, welches man einstweilen x nennt, in dem Verhältnisse 20400 — x; diese beiden Werthe sollen aber einander gleich seyn, daher die arithmetische Proportion:

$$12{,}000 - 90{,}000 = 20{,}400 - x$$
$$12{,}000 + x = 90{,}000 + 20{,}400$$
$$x = 110{,}400 - 12{,}000 = 98{,}400 \text{ fl.}$$

3) Ein Vater ist 40 Jahre alt, sein Sohn 18 Jahre; dasselbe Verhältniß im Alter findet zwischen dem Großvater und Vater des Sohnes Statt; wie alt ist der Großvater?

Auflösung. Das arithmetische Verhältniß zwischen dem Alter des Sohnes und seines Vaters ist 18 — 40; das Verhältniß zwischen dem Alter des Vaters und Großvaters aber = 40 — x. Diese Verhältnisse sollen aber einander gleich seyn; daher die arithmetische Proportion:

$$18 - 40 = 40 - x$$
$$18 + x = 40 + 40 = 2 \cdot 40 = 80$$
$$x = 80 - 18$$
$$x = 62 \text{ Jahr; Alter des Großvaters.}$$

5) Ein Bauer erndtete in einem Jahre 36, im folgenden 51 Malter Waitzen. Wie groß war seine Waitzenerndte in diesen beiden Jahren im Durchschnitte?

Auflösung. Man nenne die Durchschnittszahl der Malter $= x$, so hat man:

$$36 - x = x - 51$$
$$36 + 51 = x + x = 2x$$
$$x = \frac{87}{2}$$
$$x = 43\tfrac{1}{2} \text{ Malter.}$$

Man könnte auch gleich so verfahren: der Unterschied zwischen beiden Zahlen des Ertrags ist $51 - 36 = 15$. Theilt man diese Differenz in die Hälfte und addirt solche zur kleinern Zahl oder subtrahirt sie von der größern, so erhält man auf beide Arten die verlangte Mittelzahl; denn es ist:
$\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$; daher: $36 + 7\frac{1}{2} = 43\frac{1}{2}$ und $51 - 7\frac{1}{2} = 43\frac{1}{2}$.

4) Zu M. starben in 5 aufeinander folgenden Jahren 16, 22, 15, 31 und 56 Menschen. Wie viel starben in jedem dieser fünf Jahre im Durchschnitt und wie verhält sich die Durchschnittszahl der Gestorbenen in den beiden ersten Jahren zur Durchschnittszahl der zwei letzten Jahre?

Auflösung. Die gesuchte Mittelzahl der Gestorbenen in den 5 Jahren muß so beschaffen seyn, daß wenn man sie mit den angegebenen Zahlen vergleicht, zweierlei Summen von Differenzen sich zeigen müssen; nämlich eine, welche mehr Gestorbene, und die andere, welche weniger angiebt; diese zwei Summen müssen sich aber einander gleich seyn, und weil sie einen entgegengesetzten Sinn haben, einander aufheben.

Nun sind die beiden Differenzsummen in der Summe folgender Verhältnisse enthalten:

$$x - 15$$
$$x - 16$$
$$x - 22$$
$$x - 31$$
$$x - 56$$

setzt man hierauf, wie es seyn muß, die Differenz des Summenverhältnisses = 0 so hat man:

$$5x - 140 = 0 \text{ woraus}$$
$$5x = 140 \text{ und}$$
$$x = \frac{140}{5} = 28$$ die Durchschnittszahl der Gestorbenen für die angegebenen 5 Jahre hervorgeht.

Die Durchschnittszahl für die beiden ersten Jahre geht aus der arithmetischen Proportion:

$$16 - x = x - 22 \text{ hervor und}$$
es wird $$2x = 38$$
$$x = 19$$

Für die Durchschnittszahl der beiden letzten Jahre ist:

$$31 - x = x - 56$$
$$2x = 87$$
$$x = 43\frac{1}{2}$$

Aus der Auflösung für die Durchschnittszahl der 5 Jahre geht im Allgemeinen die Regel hervor: daß man jede Durchschnittszahl einer Reihe von Werthen dadurch findet, indem man letztere addirt, und mit der Anzahl der Glieder dividirt.

5) Der Barometerstand war an einem Tage: Morgens = 27″ 8‴, Mittags = 27″ 9‴, Abends = 28″; welches war der mittlere Barometerstand an diesem Tage?

Auflösung. Nach dem Vorigen ist es nicht nöthig, die Verhältnisse selbst zu setzen, sondern man addirt sogleich die Zahlen der Barometerstände und dividirt die erhaltene Maaßsumme durch die Anzahl der Beobachtungen. Somit ist

$$\frac{27'', 8''' + 27'', 9''' + 28''}{3} = \frac{83'', 5'''}{3} = 27'', 9''',666 \ldots$$

Die Barometerskale ist in Alt-Pariser-Maaß getheilt und sonach 12theilig.

6) Man will die mittlere Temperatur an einem Tage wissen, an welchem man den Thermometer zweimal beobachtet hat. Die erste Beobachtung hat $3°,4$ unter 0 und die zweite $2°,6$ über 0 gezeigt.

Auflösung. Der Nullpunkt des Thermometers wird als Anfang der Zählung vorwärts und rückwärts angenommen und da diese Richtungen einander entgegengesetzt sind, so werden die Grade über 0 mit + und die unter 0 mit — bezeichnet. Im gegebenen Beispiele hätte man also die beiden Thermometerstände — 3°,4 und + 2°,6. Stellt man sich nun vor, die Zählung fange bei — 3°,4 an, oder was gleich ist, dieser Punkt seye der Nullpunkt, so ist von ihm der andere Thermometerstand 3°,4 + 2°,6 = 6°,0 entfernt. Aus den so angenommenen Temperaturgraden das Mittel genommen, erhält man:

$\frac{0° + 6°,0}{2} = \frac{6°,0}{2} = + 3°$. Um aber diese Mittelzahl wieder auf den wahren Nullpunkt zu bringen, muß man 3°,4, um welche Länge er heruntergerückt wurde, abziehen, wodurch sich ergiebt + 3° — 3,4 = — 0°,4.

Hätte man wollen schon die Summe 6°,0 der Thermometerstände, ehe sie durch 2 dividirt war, auf den eigentlichen Nullpunkt reduziren, so wäre es nöthig gewesen, von derselben das Doppelte von 3°,4 abzuziehen. Es besteht aber 6°,0 aus dem positiven Thermometerstand 2°,6 und aus 3°,4, daher man — 3°,4 nur einmal von 2°,6 abziehen und aus der Differenz das arithmetische Mittel nehmen darf, um die gesuchte Zahl zu haben. Es gilt also in solchen Fällen die Regel: Man addire die Werthe von einerlei Zeichen zusammen, ziehe die kleinere Summe von der größern ab, dividire die Differenz mit der Anzahl der Glieder beider Summen, und setze dem Quotienten das Zeichen der größern Summe vor, so hat man die gesuchte Durchschnittszahl. Im gegebenen Falle wäre auf diese Weise:

$$\begin{array}{r} -\ 3°,4 \\ +\ 2,6 \\ \hline -\ 0,8 \end{array}$$

$\frac{-\ 0°,8}{2} = -\ 0°,4$ die mittlere Temperatur.

Demnach:

7) Es sind die mittleren Temperaturen der 12 Monate eines Jahrs gegeben, nämlich:

$-3°{,}3$, $-5°{,}7$, $+0°{,}8$, $+4°{,}2$, $+6°{,}9$, $+8°{,}0$, $+9°{,}5$, $+10°{,}0$, $+8°{,}0$, $+5°{,}1$ $+2°{,}3$ $-1°{,}4$

man solle die mittlere Temperatur im Jahre suchen.

Auflösung. Die Temperaturen mit gleichen Zeichen addirt, ist:

$-3°{,}3$	$+0°{,}8$
$-5\ ,7$	$+4\ ,2$
$-1\ ,4$	$+6\ ,9$
$-10°{,}4$	$+8\ ,0$
	$+9\ ,5$
	$+10\ ,0$
	$+8\ ,0$
	$+5\ ,1$
	$+2\ ,3$
	$+54°{,}8$

Nun ist $54°{,}8 - 10°{,}4 = +44°{,}4$. Hieraus der Durchschnitt für die 12 Monate:

$\frac{+44°{,}4}{12} = +3°{,}7$ mittlere Jahrestemperatur.

---

§. 200.

Anwendung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen.

Dieser Theil der Zahlenrechnung ist der wichtigste für das praktische Leben. Die allgemeinen Lehren für die Bildung und Veränderung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen haben wir schon Vorne vorgetragen und es bleibt uns hier nur noch übrig, den dort gebrauchten unbestimmten Größen Namen aus Zeit und Raum zu geben. Zum Ueberflusse werde hier wiederholt, daß nur die Zahlen für gleichartige

Dinge durch ein geometrisches Verhältniß mit einander verglichen werden können. Haben aber die Zahlen von Dingen einerlei Art das gleiche geometrische Verhältniß, wie die Zahlen einer ganz andern Gattung von Gegenständen, so kann man diese zwei Verhältnisse in einer geometrischen Proportion einander gleich setzen.

§. 201.

Beispiele über geometrische Verhältnisse.

1) Eine Kanonenkugel legt in einer Sekunde einen Weg von 600 Par.Fuß, der Schall in der nämlichen Zeit einen Weg von 1040 Par.Fuß zurück. Wie verhält sich die Geschwindigkeit der Kanonenkugel zu der des Schalls?

Auflösung. Bei allen derartigen Fragen muß man sich den einen von den gegebenen Werthen eigentlich als die Einheit denken und untersuchen, wie oft er in dem andern Werth enthalten ist. Es wird dadurch für diese Werthe ein besonderes Zahlensystem gesucht, welches mit dem natürlichen ganz ähnlich ist, in welchem auch jede Zahl ihr Verhältniß zur Einheit anzeigt, d. h. wievielmal sie diese enthält. Die Einheit ist aber das Maaß jeder Zahl, daher kann man auch sagen, in einem geometrischen Verhältnisse ist die Ausmessung einer Größe durch die andere begriffen. Nun kann man nicht anders erfahren, wie oft eine Zahl die andere ausmißt, als durch Division, weßhalb ein geometrisches Verhältniß auch nur eine Division ist. Diejenige von zwei Zahlen für einerlei Begriffe, welche man zur Einheit wählt, giebt den Divisor und die andere den Dividend. Der Quotient heißt der Exponent des geometrischen Verhältnisses und ist der Werth des Dividenden oder seine Zahl in dem gebildeten Zahlensysteme, worin der Divisor die Einheit ist. Immer nimmt man diejenige Zahl als Divisor an, zu welcher man das Verhältniß der andern wissen will. So ist z. B. in vorstehender Frage gesagt, wie sich die Geschwindigkeit der Kanonenkugel zu der des Schalls

verhalte; es wird hier sonach die Geschwindigkeit des Schalls als bekannt oder als die Einheit angenommen, und man müßte mit dem gegebenen Werth in die Zahl der Geschwindigkeit einer Kanonenkugel dividiren. Da nun die Geschwindigkeiten nur an Zeit und Entfernung abgemessen werden können, so werden die Werthe derselben durch Maaßzahlen einerlei Gattung für die Längen ausgedruckt, welche von den betreffenden Bewegungen in einem gleichen Zeittheile zurückgelegt werden. Die Sekunde gilt in derlei Fällen für die Zeiteinheit und die Zahlen, welche nach dem gleichen Maaßstabe den Längenwerth angeben, welchen ein bewegter Gegenstand in einer Sekunde auf sich nimmt, gelten für die Werthe der Geschwindigkeiten selbst. Es wird daher in unserem Beispiele ebensoviel seyn, ob ich die Geschwindigkeit der Kanonenkugel mit der des Schalls, oder 600 Fuß mit 1040 Fuß dividire.

Solches setzt man nun:

Geschw. d. Kanonenk.: Geschw. d. Schalls = 600 : 1040, d. h. Geschw. d. Kanonenk. dividirt durch die Geschw. des Schalls ist gleich 600 dividirt durch 1040, oder:

Es verhält sich die Geschwindigkeit der Kanonenkugel zu der Geschwindigkeit des Schalls, wie sich verhält 600 zu 1040.

Jede Division kann man als einen Bruch betrachten, daher $600 : 1040 = \frac{600}{1040}$.

Dividirt man nun Zähler und Nenner dieses Bruches mit der gleichen Zahl 600, damit man die Einheit des Verhältnisses, welche der Schall seyn soll, erhalte, so ergiebt sich: $\frac{1}{1{,}733\ldots}$. Diesen Werth wieder in die Form eines geometrischen Verhältnisses gebracht: $1 : 1{,}733\ldots$ Es wäre nicht nöthig gewesen, das Verhältniß auf die Bruchform zu bringen, da man ja weiß, daß der Werth desselben nicht geändert wird, wenn man beide Glieder mit einerlei Zahl dividirt, aber es ist deßwegen geschehen, weil es häufig vorkommt, daß ein Bruch in der Form eines Verhältnisses dar-

geſtellt werden muß, und um zu zeigen, daß der Werth immer nur ein und derſelbe iſt.

2) Ein Pariſer Kubikfuß Buchenholz wiegt 60 Pfund; ein Kubikfuß Waſſer 70 Pfund; wie verhält ſich das Gewicht des Buchenholzes zu dem des Waſſers?

Auflöſung. Das eigenthümliche Gewicht, welches verſchiedene Körper von ganz gleichem Rauminhalte haben, nennt man ihr ſpecifiſches Gewicht. Für ſolches gilt eine Maſſe Regenwaſſer, das einen gleichen Körperraum mit ihnen einnimmt zur Vergleichung oder für die Gewichtseinheit. Sonach wäre das Verhältniß des

Buchenholz : Waſſer = 6Ø : 7Ø
= 6 : 7 = 0,857 : 1..*)

3) Ein Kubikfuß Gold wiegt ungefähr 1330 ℔, 1′Cq Queckſilber 980 ℔, 1′Cq. Blei 795 ℔, 1′Cq. Silber 735 ℔, 1′Cq. Kupfer 615 ℔, 1′Cq. Meſſing 588 ℔, 1′Cq. Eiſen 550 ℔, 1′Cq. Luft 11⅕ Quentchen. Es wird gefragt: a) in welchem Verhältniſſe ſtehen die eigenthümlichen Gewichte dieſer Metalle zu dem des Waſſers? und b) wie verhalten ſich bei gleichem Gewichte die Räume, welche dieſe Metalle einnehmen?

Auflöſung. Nach dem Vorigen iſt für die erſte Frage:

Gold	:	Waſſer	=	133Ø : 7Ø	= 19	:	1
Queckſilber	:	=	=	98Ø : 7Ø	= 14	:	1
Blei	:	=	=	795 : 70	= 11,357	:	1
Silber	:	=	=	735 : 70	= 10,5	:	1
Kupfer	:	=	=	615 : 70	= 8,786	:	1
Meſſing	:	=	=	588 : 70	= 8,4	:	1
Eiſen	:	=	=	55Ø : 7Ø	= 7,857	:	1
Luft	:	=	=	11,2 : 8960	= 0,00125	:	1

*) Da ein Verhältniß nicht geändert wird, wenn man ſeine Glieder mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, ſo gilt dieſes Zahlverhältniß für alle möglichen gleichen Inhalte des Buchenholzes und des Waſſers.

Da mit diesem die verschiedenen Werthe der Gewichte in Zahlen ausgedruckt sind, denen die gleiche Einheit zu Grunde liegt, so zeigen dieselben zu gleicher Zeit das Verhältniß der specifischen Gewichte unter sich an, so daß also z. B. das Verhältniß von:

Gold : Queckſilber = 19 : 14 oder
Queckſilber: Gold = 14 : 19 ferner
Silber : Gold = 10,5: 19

u. ſ. w. u. ſ. w. iſt.

Für die Frage b) iſt die Betrachtung:

Das angegebene Gewicht in Pfunden für die verſchiedenen Materien gilt immer für die gleiche Raumgröße, den Kubikfuß. Um nun zu erfahren, wie viel ein Theil von einem ſolchen Gewichte, z. B. ein Pfund, Raum einnehmen würde, darf man nur mit der Anzahl der Pfunde, welche der Kubikfuß der gleichen Maſſe wiegt, dividiren; alſo

1 ℔ Gold nimmt den $\frac{1}{1330}$ten Theil eines Kubikfußes
1 ℔ Queckſ. = = $\frac{1}{980}$ ten = = =
1 ℔ Blei = = $\frac{1}{795}$ten = = =
1 ℔ Waſſer = = $\frac{1}{70}$ten = = =

u. ſ. w. u. ſ. w. ein. Es werden ſich demnach die Räume der Pfunde wie die Raumwerthe verhalten. Da es aber ein Verhältniß nicht ändert, wenn man ſeine Glieder mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, ſo werden überhaupt bei der Vorausſetzung gleicher Gewichte folgende Raumverhältniſſe Statt haben:

Gold : Waſſer = $\frac{1}{1330}$: $\frac{1}{70}$ = 70 : 1330 = 1 : 19.
Queckſilb. : Waſſer = $\frac{1}{980}$: $\frac{1}{70}$ = 70 : 980 = 1 : 14.
Blei : Waſſer = $\frac{1}{795}$: $\frac{1}{70}$ = 70 : 795 = 1 : 11,357

u. ſ. w. u. ſ. w.

Aus dieſen Beiſpielen kann man die allgemeine Regel ableiten, daß ſich die Räume gleicher Gewichte von verſchiedenen Materien verhalten, wie umgekehrt ihre ſpecifiſchen Gewichte.

4) Man will in einem Kirchthurme eine Glocke auf-

hängen; 16 starke Männer sind dazu nöthig; gebraucht man aber einen Flaschenzug zum Aufwinden, so reichen 2 Männer dazu hin. Wie verhält sich die Kraft eines Mannes allein, zu der Kraft, welche er durch den Flaschenzug ausüben kann?

Auflösung. Nimmt man die Wirkung oder die ganze Kraft, welche zur Hebung der Glocke nöthig ist = 1 an, so ist die Kraft eines Mannes ohne Flaschenzug = $\frac{1}{16}$ und mit dem Flaschenzug = $\frac{1}{2}$; daher

unmittelb. Mannskr. : Mannskr. mit Flaschenz. = $\frac{1}{16} : \frac{1}{2}$.
= 2 : 16
= 1 : 8*)

5) In einer Kasse A befinden sich 480 fl., in einer andern B 160 fl. Es wird gefragt:

a) Wie verhalten sich diese Kassenvorräthe in den kleinsten Zahlen ausgedruckt; und

b) wie verhalten sich die Reste in den kleinsten Zahlen, wenn aus jeder Kasse 80 fl. herausgenommen werden?

Auflösung. Für die Frage a) ist:

Vorrath A : Vorrath B = 480 : 160 = 3 : 1.

Vorrath B : Vorrath A = 160 : 480 = 1 : 3.

Für die Frage b) ist:

Rest A : Rest B = 480 — 80 : 160 — 80 = 5 : 1.

Rest B : Rest A = 160 — 80 : 480 — 80 = 1 : 5.

6) Um ein Stück Feld in einer Woche umzugraben, braucht man 10 Arbeiter; zu einem andern, das in derselben Zeit umgegraben worden, hat man 40 Arbeiter gebraucht. Wie verhält sich die Größe eines Feldes zu der des andern, angenommen, daß jeder Arbeiter die gleichen Kräfte angewandt, und alle übrigen Umstände von der nämlichen Beschaffenheit sind?

---

*) Die Kraft eines Mannes wird durch den Flaschenzug 8 mal verstärkt; auch verhält sich die unmittelbare Mannskraft zur Kraft mit dem Flaschenzug, wie umgekehrt, die Zahl der Mannschaft, welche in beiden Fällen nöthig ist.

Auflösung. Man nehme an, das Flächenstück, welches auf die Arbeit jeden Mannes in der gleichen Zeit gerechnet werden kann, seye = 1, so ist

die Fläche des 1ten Feldes = 10 × 1 = 10
und = = = 2ten = = 40 × 1 = 40
daher:

Größe d. 1ten F. : Größe d. 2ten = 10 : 40 = 1 : 4.

7) Von zwei Arbeitern bringt der eine in 5 Stunden soviel zu Stande, als der andere in 7 Stunden. Wie wird sich der tägliche Arbeitslohn des ersten, welcher A heiße, zu dem des zweiten B verhalten müssen?

Auflösung. Zu einer Arbeit, welche der erste Arbeiter in 5 Tagen beendigen könnte, würde also der zweite 7 Tage brauchen. Nimmt man nun an, es werde für das gleiche Stück Arbeit auch der gleiche Lohn = 1 bezahlt, so würde der Taglohn von A = $\frac{1}{5}$ und der von B = $\frac{1}{7}$ betragen und es verhält sich daher:

A Taglohn : B Taglohn = $\frac{1}{5}$: $\frac{1}{7}$ = 7 : 5,

d. h. der Lohn eines Arbeiters verhält sich zu dem Lohn eines andern in der gleichen Zeit, wie umgekehrt die Zeiten, welche sie auf die gleiche Arbeit verwenden.

8) Ein mäßiger Wind legt in einer Sekunde 15 Fuß zurück. Der heftigste Sturm (Orkan) in einer Secunde 150 Fuß. Wie verhält sich die Geschwindigkeit des Windes zur Geschwindigkeit des Orkans?

Auflösung. Die Geschwindigkeit des Windes ist = 1 Sek. × 15′ und die des Orkans = 1 Sek. × 150′; daher:

Geschw. d. Winds : Geschw. d. Ork. = 15 : 150 = 1 : 10, d. h. wie die in gleicher Zeit zurückgelegten Längen.

9) Im Jahre 1817 galt der Scheffel Dinkel 40 fl. und im Jahre 1835 gilt er 4 fl. 24 kr.; man fragt: a) welches sollte das Verhältniß des Preises von einem 6pfündigen Laib Brod vom J. 1817 zu dem Preise des gleichen Brodgewichts im J. 1835 seyn? und b) wie sollte sich das Gewicht eines

Kreuzer-Semmels vom J. 1817 zu dem Gewicht des Kreuzer-Brodes im Jahr 1835 verhalten?

Auflösung. Für die Frage a) ist:

Die Nebenkosten der Bäckerei aus einem Scheffel Dinkel seyen in beiden Jahren die gleichen und nehmen einen bestimmten Theil für die Deckung derselben in Anspruch. Nimmt man nun an, aus dem Reste könne eine gewisse Anzahl 6pfündiger Laibe gebacken werden, welche x heiße, so muß der Preis für 1 Laib im Jahre 1817 $= \frac{40 \text{ fl.}}{x}$ und im Jahre 1835 $= \frac{4 \text{ fl. } 24 \text{ kr.}}{x}$ seyn.

Verwandelt man die Gulden durch Multiplication mit 60 in Kreuzer, so hat man:

$$\left.\begin{matrix}\text{Pr. 1 Laib v. 6 ℔} \\ \text{im Jahr 1817}\end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix}\text{Preis v. 1 Laib} \\ \text{im J. 1835}\end{matrix}\right\} = \frac{2400}{x} : \frac{264}{x}$$

$$= 600 : 66$$

$$= 9{,}1 : 1$$

Für die Frage b) ist:

Man nehme das Gewicht eines Scheffel Dinkels oder von der Masse Semmelbrod, welches der Bäcker um den Ankaufspreis des Scheffel Dinkels zu backen im Stande ist $= 1$ an, so mußte der Kreuzerweck im Jahre 1817 $= \frac{1}{2400}$ Theile und im Jahre 1835 $= \frac{1}{264}$ Theile wägen. Nach diesem ist:

$$\left.\begin{matrix}\text{Gewicht des 1 kr.} \\ \text{Semmels i. J. 1817}\end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix}\text{Gew. d. 1 kr. Sem-} \\ \text{mels im J. 1835}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2400} : \frac{1}{264}$$

$$= 264 : 2400$$

$$= 1 : 9{,}1$$

10) Das Dampfschiff von Mainz hat zu seiner Fahrt, nach dem etwa 20 Meilen weit entfernten Köln 12 Stunden nöthig; das Dampfschiff von Frankfurt nach Mainz, eine Strecke von 4 Meilen, braucht $2\frac{1}{2}$ Stunden. Wie verhält sich die Geschwindigkeit des ersten Schiffes A zu der des zweiten B?

Auflösung. Wenn man berechnet, wie viel jedes Schiff in der gleichen Zeit, z. E. einer halben Stunde, Wegs zurückgelegt, so ergiebt sich für

A $= \frac{20}{24}$ Meilen, und für B $= \frac{4}{5}$ Meilen,

diese Werthe drücken aber zugleich die Geschwindigkeiten aus; daher:

Geschw. v. A } : Geschw. v. B } $= \frac{20}{24} : \frac{4}{5} = 20 \times 5 : 24 \times 4$

$= 5 \times 5 : 6 \times 4$

$= 25 : 24$

$= 1{,}04^2 : 1$

11) Durch die kleinere Röhre eines Brunnens wird sein Wasserbehälter in 24 Stunden und 20 Minuten, durch die größere in 10 Stunden und 10 Minuten angefüllt. Wie verhält sich die Menge Wasser, welche sich in der gleichen Zeit aus der ersten Röhre ergießt zu der aus der zweiten sich ergießenden?

Auflösung. Man nehme den Rauminhalt des Wasserbehälters $= 1$ an, so ist die sich ergießende Wassermenge in einer Minute

aus der kleinern Röhre $= \frac{1}{1460}$tel des Behälters,

" " größern " $= \frac{1}{610}$tel " "

somit das Verhältniß der Volumen Wasser, welche beide Röhren in der gleichen Zeit ausspeien:

Volumen d. kleinen Röhre } : Volumen d. größern Röhre } $= \frac{1}{1460} : \frac{1}{610}$

$= 610 : 1460$

$= 1 : 2{,}4$

12) Das Königreich Württemberg, 365 Quadratmeilen groß, hat eine Bevölkerung von 1,500,000 Einwohner. Im russischen Reiche leben im Durchschnitt 124 Menschen auf einer Quadratmeile. Wie verhält sich die Bevölkerung einer Quadratmeile in Württemberg zu der von Rußland?

Auflösung. 1 □M. Württemb. : 1 □M. Rußland $= \frac{1,500,000}{365} : 124$

$= 4132,23 : 124$

$= 33,3 : 1$

13) Die Erde bewegt sich um die Sonne mit einer Geschwindigkeit von 95000′ in der Sekunde. Ein Lichtstrahl aber macht in einer Sekunde einen Weg von 44336 Meilen, die Meile zu 23666 Fuß gerechnet. Wie verhält sich nun die Geschwindigkeit des Erdlaufs zu der Geschwindigkeit des Lichts?

Auflösung. Die Geschwindigkeit der Erde wird ausgedruckt durch: 95000′ × 1 Sek., und die Geschw. des Lichts durch 44336 × 23666′ × 1 Sek., daher ist:

Geschwind. der Erde : Geschwind. des Lichts $= 95000 : 44336 \times 23666$

$= 1 : 0,4667 \times 23666$

$= 1 : 11044$

14) Der Mond ist von der Erde 51000 Meilen entfernt; die Erde von der Sonne 21 Millionen Meilen; wie verhält sich die erste Entfernung zur zweiten?

Auflösung. Entfern. d. Mondes : Entfern. der Erde $= 51000 : 21000000$

$= 1 : 411,76$

15) Die Entfernung des Planeten Venus (Abendstern) von der Sonne beträgt 15 Millionen Meilen, wie verhält sie sich zur Entfernung der Erde?

Auflösung. Entfern. d. Venus : Entfern. der Erde $= 15 : 21$

$= 5 : 7$

16) Der Stiftskirchenthurm in Stuttgart hat eine Höhe von 210 und der Straßburger Münsterthurm eine Höhe von 495,654 württemb. Fußen. Wie verhalten sich die Höhen beider Thürme?

Auflösung. Stiftsthurm in Stuttg. : Münster in Straßb. $= 210 : 495,654$

$= 210000 : 495654$

17) Ein Bote A machte den Weg von $1\frac{7}{8}$ Meilen in $2\frac{1}{2}$ Stunden, ein anderer Bote B legte den Weg von $2\frac{1}{2}$ Mei-

len in $3\frac{1}{2}$ Stunden zurück. Wie verhält sich die Geschwindigkeit des ersten zur Geschwindigkeit des zweiten?

Auflösung. Untersucht man, wie viel Stück Wegs jeder Bote in der gleichen Zeit, z. B. in einer halben Stunde, zurückgelegt hat, so erhält man:

für die Geschwindigkeit von A $= \frac{15}{8} : 5$ und

" " " " B $= \frac{5}{2} : 7 = \frac{5}{2 \times 7}$

daher:

$$\left.\begin{matrix}\text{Geschwind.}\\ \text{v. A}\end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix}\text{Geschwind.}\\ \text{v. B}\end{matrix}\right\} = \frac{15}{8 \times 5} : \frac{5}{2 \times 7} = \frac{3}{8} : \frac{5}{14}$$

$$= 3 \times 14 : 5 \times 8 = 42 : 40$$

18) Es hat Jemand zwei Gärten von gleichem Inhalte; der erste A hat die Gestalt eines Rechtecks und ist $4\frac{1}{2}$ Ruthen lang und $1\frac{1}{2}$ Ruthen breit; der andere B hat die Form eines Quadrats, dessen Seite $= 2\frac{1}{2}$ Ruthe. Wie verhalten sich die Umfänge beider Gärten?

Auflösung. Das Rechteck hat 2 Paar gleiche Seiten; somit sein Umfang $= (\frac{9}{2} + \frac{3}{2}) \times 2 = \frac{24}{2} = 12$ Ruthen, das Quadrat hat vier gleiche Seiten, daher sein Umfang $= \frac{5}{2} \times 4 = \frac{20}{2} = 10$ und das Verhältniß;

$$\left.\begin{matrix}\text{Umfang des}\\ \text{Rechtecks A}\end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix}\text{Umfang des}\\ \text{Quadrats B}\end{matrix}\right\} = 12 : 10 = 6 : 5$$

19) Wie verhält sich ein Gulden (= 60 kr.) zu einem Kronenthaler (= 2 fl. 42 kr.).

Auflösung. Löst man die 2 fl. des Kronenthalers in Kreuzer auf, so ist sein Werth = 162 kr.; somit

1 Gulden : 1 Kr.Thlr. = 60 : 162 = 20 : 54

= 10 : 27 = 1 : 2,7

Dieses Verhältniß zeigt, daß auf 10 Kronenthaler 27 Gulden gehen müssen. Ebenso daß ein Kronenthaler = 27 Zehntels Gulden oder Sechser ist.

20) Aus einer Mark fein Gold können $67\frac{7}{71}$ Dukaten geprägt werden; Friedrichsd'or oder Pistolen aber nur $58\frac{8}{13}$

Stück, wie verhalten sich nun die Werthe beider Münzsorten?

Auflösung. Um den Werth von einem Stück dieser Münzen zu erfahren, muß man mit ihrer Anzahl in den Werth einer Mark dividiren; solcher seye = 1, so ist:

$$1 \text{ Ducaten} = 1 : 67\frac{67}{71} = 1 : \frac{67 \cdot 71 + 67}{71} = \frac{71 \text{ tels}}{4824} \text{ Mark.}$$

$$1 \text{ Friedrichsd'or} = 1 : 38\frac{10}{13} = 1 : \frac{38 \cdot 13 + 10}{13} = \frac{13 \text{ tels}}{504} \text{ M.}$$

und somit das Verhältniß:

$$1 \text{ Duk.} : 1 \text{ Friedrichsd'or} = \frac{71}{4824} : \frac{13}{504} = 71 \times 504 : 13 \times 4824$$
$$= 35784 : 62712 = 1 : 1{,}7525$$

21) Wie verhält sich Ein Gulden zu einem preußischen Thaler (= 1 fl. 45 kr.)?

Auflösung. 1 preußischer Thaler v. 1 fl. 45 = 105 kr.

$$1 \text{ Gulden} : 1 \text{ pr. Thlr.} = 60 : 105 = 12 : 21$$
$$= 4 : 7$$

22) In Frankreich sind 80 Francs gleich 81 Livres; wie verhält sich 1 Franc zu 1 Livre?

Auflösung. Hier wird 1 Livre als bekannt, oder als die Einheit vorausgesetzt, weßhalb 1 Franc im Werthe eines Livre ausgedruckt werden muß; da nun

80 Francs = 81 Livres, so ist

1 Fr. = $\frac{81}{80}$ Livres und sonach

$$1 \text{ Franc} : 1 \text{ Livre} = \frac{81}{80} : 1 = 81 : 80.$$

23) Aus einer Mark fein Silber werden 24 Gulden geprägt; ebenso $10\frac{387}{1000}$ Fünffrankenstück; wie verhält sich der Gulden zu einem Fünffrankenstück?

Auflösung. Der Werth eines Gulden ist = $\frac{1}{24}$ tels M.; der Werth eines Fünffrankenstücks $= 1 : 10\frac{387}{1000} = 1 : 10{,}387$
$= 0{,}0963$ Mark;

daher: $1 \text{ Gulden} : 1 \text{ Fünffr.} = \frac{1}{24} : 0{,}0963$
$= 1 : 2{,}3112$

24) Zu einem Bauwesen hat man ein Quantum Backsteine nöthig; die Mauern sollen auf den halben Stein aufgeführt werden (d. h. die Dicke der Mauer wird gleich der Breite des Steins). Auf der Ziegelei A kann man Steine haben 11 Zoll lang, 3 Zoll hoch (Dezimal); auf der Ziegelei B sind sie nur 10 Zoll lang und 3 Zoll hoch. Von den erstern kostet das Tausend 21 fl.; von den letztern nur 20 fl. Welche Gattung kostet am Wenigsten?

Auflösung. Zunächst berechne man, wie groß die Wandflächen sind, welche man mit beiden Sorten auf die bedingte Art aufführen könnte. Der Flächentheil, welchen ein Backstein von der Ziegelei A in der Wand einnehmen würde, ist = 11″ × 3″ = 33″□; daher von 1000 Stück = 33″□ × 1000 = 33000″□.

Ein Stein der Ziegelei B trägt zur Wandfläche = 10″ × 3″ = 30″□, daher 1000 Stücke = 30″□ × 1000 = 30000″□ bei.

Hierauf untersuche man mittelst der bekannten Preise für diese beiden Flächen, wie hoch 1″□ zu stehen käme, woraus man erhält:

$$1''\square \text{ von der Ziegelei } A = \frac{21}{33000};$$

$$1''\square \quad " \quad " \quad B = \frac{20}{30000}.$$

Nun kann man das Verhältniß setzen:

$$1''\square \text{ von } A : 1''\square \text{ von } B = \frac{21}{33000} : \frac{20}{30000}$$

$$= 21 \times 3 : 33 \times 2$$

$$= 21 : 22$$

Es bietet also die Ziegelei A den Vortheil dar.

25) Bei einem andern Gebäude sollen die Mauern auf den ganzen Stein aufgeführt werden (d. h. die Höhe des Backsteins ist gleich der Dicke der Mauer). Die eine Art A der Steine ist stückweise = 11 Zoll lang und 6 Zoll breit; die andere B ist 10 Zoll lang und 5 Zoll breit; der Preis der

größern *A* iſt 22 fl.*), der kleinern *B* 21 fl. Von welcher Sorte kauft man am Vortheilhafteſten?

Auflöſung. Solche iſt die nämliche, wie vorhin; alſo:

1 Stück von *A* giebt eine Fläche von $11'' \times 6'' = 66''\square$

1 = = *B* = = = $10'' \times 5 = 50''\square$

1000 = = *A* geben = = $1000 \times 66''\square = 66{,}000''\square$

1000 = = *B* = = = $1000 \times 50''\square = 50{,}000''\square$

Die Preiſe der einzelnen Quadr.Zolle ſind:

$1''\square$ von A $= \frac{22}{66000}$ fl., $1''\square$ von B $= \frac{21}{50000}$ fl.

$$\left.\begin{matrix}\text{was } 1''\square \text{ von A} \\ \text{koſtet}\end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix}\text{was } 1''\square \text{ von B} \\ \text{koſtet}\end{matrix}\right\} = \frac{22}{66000} : \frac{21}{50000}$$

Die Sorte A koſtet am Wenigſten.

$$= 22 \times 50 : 21 \times 66$$
$$= 2 \times 50 : 21 \times 6$$
$$= 50 : 21 \times 3$$
$$= 50 : 63$$

26) Man hat zwei Arten von Backſteinen; von A iſt das Stück 11 Zoll lang, $5\frac{2}{3}''$ breit, 3″ dick; von B das Stück 10″ = = 5 = = $2\frac{1}{2}$ =

Wie verhält ſich der körperliche Inhalt beider Arten?

Auflöſung. Man berechne für 1 Stück von jeder Sorte den körperlichen Gehalt, ſo enthält:

1 Stück von A $= 11'' \times 5\frac{2}{3}'' \times 3'' = 187''^{Cq.}$

1 = = B $= 10'' \times 5'' \times 2\frac{1}{2}'' = 125''^{Cq.}$

$$\left.\begin{matrix}\text{Körperinhalt} \\ \text{von A}\end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix}\text{Körperinhalt} \\ \text{von B}\end{matrix}\right\} = 187 : 125.$$

27) Wenn ein Fuhrmann 2400 Stück von der größern Gattung A aufladen kann, wie viel wird er von der kleinern aufladen können?

Auflöſung. Nach dem vorigen Verhältniſſe gehen auf 1 Stück der A Sorte $\frac{187}{125} = 1{,}496$ Stück der kleinern B; daher iſt der Werth von 24000 Stück der größern $= 24000 \times 1{,}496 = 35904$ der kleinern Art.

*) Dem Tauſend nach.

28) Ein Pariser Fuß ist = 1,06575 englische Fuß. Wie verhält sich der Pariser Fuß zum Englischen?

Auflösung. Der Pariser Fuß soll die Einheit werden, deßhalb drücke man aus:

$$1 \text{ Fuß englisch} = \frac{1}{1{,}06575} \text{ Paris. Fuß}$$

und somit:

$$1 \text{ Paris. F.} : 1 \text{ engl. F.} = 1 : \frac{1}{1{,}06575}$$
$$= 1{,}06575 : 1.$$

29) Ein württemb. Fuß ist = 0,881944 .... Paris. Fuß; welches ist das Verhältniß des württemb. Fußes zum Pariser in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedruckt?

Auflösung. Da 1 württemb. Fuß = 0,881944 ... Paris. F. ist, so ist 1 Paris. F. = $\frac{1}{0{,}881944}$ württemb. Fuß; daher nach dem Vorigen:

$$1 \text{ württemb. F.} : 1 \text{ Par. F.} = 1 : \frac{1}{0{,}881944}$$
$$= : = : = = = 0{,}881944 : 1$$

Verwandelt man nun auf nachstehende Weise den Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch:

$$0{,}881944 \ldots = \frac{8819}{10000} + \frac{4}{90000} = \frac{79375}{90000}$$

1 7 2 8

90000 : 79375 : 10625 : 5000 : 625
79375 74375 10000 5000
10625 5000 625 0 =

den Kettenbruch aufgelöst:

	1	7	2	8	
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{127}{144}$	demnach:

1 württembergischer Fuß : 1 Pariser Fuß = 127 : 144.

30) Aus einer Mark fein Silber werden $9\frac{1}{11}$ Stück Brabanter- oder Kronen-Thaler und aus der Mark fein Silber 14 Stücke preußiſche Thaler geprägt; wie verhält ſich der Kronenthalerwerth zu dem preußiſchen Thalerwerth, wenn der Kronenthaler zu 2 fl. 42 kr. und der preußiſche Thaler zu 1 fl. 45 kr. gerechnet wird?

Auflöſung. Der Werth des Kronenthalers iſt

$$= \frac{1}{9^1/_{11}} = \frac{1}{^{100}/_{11}} = 1 \times \frac{11}{100} = \frac{11}{100} = 0{,}_{11} \text{ feine Mark.}$$

Der preuß. Thaler $= \frac{1}{14} = 0{,}_{071424242} \ldots\ldots$ feine Mark.

Um nun den Werth eines Kreuzers in jeder Münze zu erfahren, muß man den Werth eines Stückes mit der Anzahl Kreuzer, welche auf daſſelbe gehen, dividiren, wodurch erhalten wird:

1 kr. des Kronenthl. $= \frac{11}{100 \times 162} = \frac{11}{16200}$ Mark S.

1 kr. des pr. Thlrs. $= \frac{1}{14 \times 105} = \frac{1}{1470}$ M. S.

und daher:

$$\left.\begin{matrix}\text{1 kr. des} \\ \text{Kronenthlrs.}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{1 kr. des pr.} \\ \text{Thlrs.}\end{matrix}\right. = \frac{11}{16200} : \frac{1}{1470}$$

$$= 11 \times 1470 : 16200$$

$$= 16170 : 16200$$

Hieraus geht hervor, daß ein preußiſcher Thaler mehr Gehalt hat, als ein Brabanter Thaler.

Im Großherzogthum Heſſen wurden im Jahre 1825 ſogar Kronenthaler geſchlagen, von denen $9\frac{818}{5909}$ Stück auf die feine Mark gehen, und ſonach noch ſchlechter als Brabanterthaler ſind; was aus Folgendem erſehen werden kann. Der Werth eines heſſiſchen Kronen-Thalers

$$= \frac{1}{9^{818}/_{5909}} = \frac{1}{^{54000}/_{5909}} = 1 \times \frac{5909}{54000} = \frac{5909}{54000} \text{ Mark,}$$

und ſein Kreuzer $= \frac{5909}{54000 \times 162} = \frac{5909}{8748000}$ Mark.

Verwandelt man die betreffenden Werthe in Dezimalbrüche, so ist:

1 kr. des Brabanterthlr. $= \frac{11}{16200} = 0{,}000679$ Mark.

1 kr. des hessischen Thlr. $= \frac{5909}{8748000} = 0{,}000672$ =

somit:

1 kr. des Brab.Thlr. : 1 kr. des hess. Thlr. $= 0{,}000679 : 0{,}000672.$

es gehen daher 679 hessische Kronenthaler auf 672 Brabanterthaler.

31) Der französische Fuß wird im Duodezimalsystem getheilt, d. h. er ist = 12 Zoll = 144 Linien. Vergleicht man nachstehende Längenmaaße mit diesem Fuß, so ist der Werth von:

1 Württembergischer Längenschuh	=	=	127 Par. Linien
1 Bairischer	=	=	129,38 Par. =
1 Badischer	=	=	132,7888 = =
1 Hessendarmstädter	=	=	110,82397 = =
1 Preußischer	=	=	139,13 = =
1 Hessen-Casseler	=	=	126,3 = =
1 Frankfurter	=	=	126,162 = =
1 Basler	=	=	135,0 = =
1 französischer Mètre	=	=	443,296 = =

Man fragt: 1) welches sind die Verhältnisse des württembergischen Fußes zu den angeführten Längeneinheiten und 2) welches sind die Verhältnisse des französischen Mètre zu den gleichen Maaßen?

Auflösung. Da alle Maaße in einer gleichen Einheit, der Pariser Linie ausgedruckt sind, so ist es leicht durch Division ihrer Werthe zu erfahren, wie oft die eine Länge in der andern enthalten ist; so wäre z. B. 1 bairischer Fuß $= \frac{129{,}38}{127}$ württembergische; daher die Verhältnisse:

1 Württemb. Fuß.	: 1 Bairischen Fuß	= 127	:	129,38
		= 1	:	1,01874
1 Württemb. Fuß	: 1 Badischen Fuß	= 127	:	132,9888
		= 1	:	1,047156
1 Württemb. Fuß	: 1 Darmstädter Fuß.	= 127	:	110,82397
		= 1	:	0,87263
1 Württemb. Fuß	: 1 Preußischen Fuß.	= 127	:	139,13
		= 1	:	1,09551
1 Württemb. Fuß	: 1 Casseler Fuß.	= 127	:	126,3
		= 1	:	0,9945
1 Württemb. Fuß	: 1 Frankfurter Fuß.	= 127	:	126,162
		= 1	:	0,9934
1 Württemb. Fuß	: 1 Basler , Fuß.	= 127	:	135,0
		= 1	:	1,063
1 Württemb. Fuß	: 1 Mètre.	= 127	:	443,296
		= 1	:	3,49052

Für die zweite Frage erhält man:

1 Mètre : 1 Württemberg. Fuß	= 443,296	:	127
	= 1	:	0,28649
1 Mètre : 1 Bairischen Fuß	= 443,296	:	129,38
	= 1	:	0,29185916
1 Mètre : 1 Badischen Fuß	= 1	:	0,3
1 Mètre : 1 Darmstädter Fuß	= 443,296	:	110,82397
	= 1	:	0,25
1 Mètre : 1 Preußischen Fuß	= 443,296	:	139,13
	= 1	:	0,3138535
1 Mètre : 1 Hessen-Casseler Fuß	= 443,296	:	126,3
	= 1	:	0,2849112
1 Mètre : 1 Frankfurter Fuß	= 443,296	:	126,162
	= 1	:	0,2846

1 Mètre : 1 Basler Fuß = 443,296 : 135, o
= 1 : 0,304537

32) Für den Kleinhandel und das tägliche Leben ist in Frankreich noch ein Fußmaaß erlaubt, wovon 10 Doigts (Zoll) und 3,7638 Lignes auf einen württembergischen Fuß gehen; wie verhält sich der württembergische Fuß zu diesem französischen Fuß, welcher zwölftheilig ist?

Auflösung. Da 10 Doigts = 10 × 12 = 120 Lignes, so ist 10 Doigts + 3,7638 Lignes = 123,7638 Lignes = 1 württemb. Fuß. Nun hat besagter französische Fuß 144 solcher Lignes, daher:

1 württemb. Fuß : 1 französisch. Fuß = 123,7638 : 144
= 1 : 1,163506

auch würde sich der Pariser Fuß zu diesem französischen verhalten $= \frac{1}{127} : \frac{1}{123,7638} = 123,7638 : 127.$

33) Der Nürnberger Artillerie-Fuß hat 129,8 Par. Linien und der Nürnberger Stadtfuß 134,67. Wie verhält sich jeder zu dem württembergischen Fuß?

Auflösung. Da 1 württemb. Fuß = 127 Par. Linien, so ist 1 Nürnberger Artillerie-Fuß $= \frac{129,8}{127}$ württemb. und 1 = Stadt = $= \frac{134,67}{127}$ =

daher:

1 Nürnberg. Artill.Fuß : 1 württemb. Fuß $= \frac{129,8}{127} : 1$
= 129,8 : 127

1 Nürnberg. Stadtfuß : 1 württemb. Fuß $= \frac{134,67}{127} : 1$
= 134,67 : 127

34) Es sind 100 württ. Ellen = 88,84 Brabanter Ellen
100 = = = 73,74 bairische =
100 = = = 67,15 engl. Yards

100 württ. Ellen	=	78,83	Wiener Ellen	
100 Nürnb. =	=	94,97	Brabanter =	
100 Frankf. =	=	79,16	=	=
100 Münchn. =	=	120,48	=	=
100 Pariser Stab	=	171,88	=	=
100 badische Ellen	=	80,17	=	=
große 100 Basler =	=	170,51	=	=
kleine 100 =	=	77,98	=	=
100 Berliner =	=	96,46	=	=
100 Berner =	=	78,35	=	=
100 Kölner =	=	83,03	=	=
100 Darmst. =	=	79,20	=	=

Verlangt man nun für die Einheiten der aufgeführten Längen die Verhältnisse zur württemb. Elle zu suchen, so betrachte man Folgendes: Da 100 württemb. Ellen = 88,84 Brabanter Ellen sind, so muß eine Brabanter Elle = $\frac{10000}{8884}$ württemb. Ellen seyn. Ebenso sind 100 württemb. Ellen = 73,74 bairische, daher 1 b. E. = $\frac{10000}{7374}$ württemb. Ellen u. s. w. Das Verhältniß der meisten Längen ist schon in dem Werthe der Brabanter Ellen angegeben, so daß man beide Glieder nur mit dem Werthe der württemb. dividiren darf, um die Einheit für die Brabanter Elle zu erhalten. Die Ausführung giebt:

1 württemb. Elle	:	1 Brabanter Elle	=	1 : 1,12562
1 württemb. Elle	:	1 bairische Elle	=	1 : 1,3561
1 =	:	1 engl. Yard	=	1 : 1,4892
1 =	:	1 Wiener E.	=	1 : 1,2688
1 =	:	1 Nürnb. E.	=	1 : 1,069
1 =	:	1 Frankf. E.	=	1 : 0,891
1 =	:	1 Münchn-E.	=	1 : 1,3561
1 =	:	1 Paris. Staab	=	1 : 1,9374
1 =	:	1 badische Elle Stadt	=	1 : 0,9024

1 württemb. Elle	:	1 bad. Elle Landes=	=	1 :	0,976824
1 =	:	1 gr. Basl. E.	=	1 :	1,019293
1 =	:	1 kl. Basl. E.	=	1 :	0,87776
1 =	:	1 Berliner Elle	=	1 :	1,085772
1 =	:	1 Berner =	=	1 :	0,881922
1 =	:	1 Kölner =	=	1 :	0,9346
1 =	:	1 Darmst. =	=	1 :	0,89149
1 =	:	1 Cassseler =	=	1 :	0,92695

Beinahe in jedem Werke, welches Vergleichungen von Längenmaaßen enthält, weichen die Verhältnisse etwas von einander ab, weil es sehr schwer ist, Maaßstäbe zu erhalten, die sich vollkommen gleich sind; auch hängt die Schätzung der kleinern Theile sehr von der Uebung des Augenmaaßes ab. Um nicht wieder zu den vielen eine weitere Abweichung anzureihen, habe ich vorstehende Verhältnißzahlen nach Wolfram, Lauteschläger und dem württemb. Regierungs=Blatte berechnet.

35) Zur Vergleichung der verschiedenen Meilenmaaße, bedient man sich der Länge eines Grades vom Erd=Aequator; so daß man bei jeder Gattung angiebt, wie viele Meilen auf einen solchen Grad gehen. Weiß man nun, daß:

15,0	deutsche Meilen	= 1°
69,032	neue englische Meilen	= 1°
60,00	englische Seemeilen	= 1°
20,00	Leagues	= 1°
50,36	alte gallische Leuca	= 1°
25,0	französische Landmeilen, Lieues	= 1°
28,55 =	kleine Meilen	= 1°
11,13 =	Myriamêtres	= 1°
20,0 =	Seemeilen	= 1°
601,1	griechische Stadien (alte)	= 1°
600,0	italienische Meilen	= 1°
14,671	österreichische Meilen	= 1°
13,041	polnische Meilen	= 1°
18,0	portugiesische Meilen	= 1°

14,776 preußische Meilen = 1°
75,635 römische Meilen à 8 olympische Stad. = 1°
74,744 = = neue = 1°
104,29 rußische Werſten = 1°
11,985 schwäbische Reisemeilen = 1°
10,414 schwedische Meilen = 1°
13,289 Schweizer = = 1°
26,597 spanische = (legua legal) = 1°
66,594 türkische = (Berri) = 1°
u. s. w. u. s. w.

so kann man die Verhältnisse einer beliebigen Meilengattung zu allen übrigen finden. Nehmen wir an, daß eine Vergleichung sämmtlicher Meilenlängen mit der deutschen Meile in der Art vorgenommen werden soll, daß die deutsche Meile die Einheit der Verhältnißwerthe bilde, so wird z. B. seyn:

1 deutsche Meile $= \frac{69,032}{15}$ neue englische Meilen; daher:

1 englische Meile : 1 deutsche Meile $= 1 : \frac{69,032}{15} = 1 : 4,602$;

ebenso findet man die übrigen und erhält:

1 englische Seemeile : 1 deutsche M. = 1 : 4,0
1 League : 1 = = = 1 : 1,333 . . . . .
1 alte gall. Lieuë : 1 = = = 1 : 3,357
1 franz. Lieue : 1 = = = 1 : 1,666 . . . .
1 franz. kl. M. : 1 = = = 1 : 1,903
1 = Myriamètre : 1 = = = 1 : 0,742
1 = Seemeile : 1 = = = 1 : 1,333 . . . .
1 a. griechische Stad. : 1 = = = 1 : 40,073 . . .
1 italienische M. : 1 = = = 1 : 40,0
1 österreichische M. : 1 = = = 1 : 0,978
1 polnische M. : 1 = = = 1 : 0,869
1 portugiesische M. : 1 = = = 1 : 1,2
1 preußische M. : 1 = = = 1 : 0,985
1 römische M. alt. : 1 = = = 1 : 5,042
1 = = neue : 1 = = = 1 : 4,983
1 rußische Werſte : 1 = = = 1 : 6,953
1 schwäb. Reisemeile : 1 = = = 1 : 0,799

1 schwedische M.	:	1 deutsche M.	=	1	:	0,694
1 schweizer. M.	:	1 "	=	1	:	0,886
1 legua legal	:	1 "	=	1	:	1,773
1 Berri	:	1 "	=	1	:	4,440

36) Die Berechnung vorstehender Verhältnisse habe ich auf die neuesten Erfahrungen der Geodäsie gegründet, wornach das Verhältniß der Erdaxe zum Durchmesser des Aequators = 294868 : 295862 ist. Nach diesem ergiebt sich die Länge

der halben Erdaxe	=	3260852,493	Toises
	=	19565114,958	Pariser Fuß
	=	6355521,94	Mètres
	=	22184073,30	württemb. Fuß
des Aequator Radius	=	3271844,827	Toises
	=	19631070,0	Par. Fuß
	=	6376945,0	Mètres
	=	22258853,05	württemb. Fuß
d. Umfang des Aequat.	=	20557605,0	Toises
	=	123345630,0	Par. Fuß
	=	40067519,2	Mètres
	=	139746400,0	württemb. Fuß
1 Grad des Aequators	=	57104,467	Toises
	=	342626,8	Par. Fuß
	=	111298,664	Mètres
	=	388184,36	württemb. Fuß
1 deutsche Meile (geog.)	=	3806,964	Toises
	=	22841,784	Par. Fuß
	=	7419,911	Mètres
	=	25878,96	württemb. Fuß.

Anmerk. Es ist hier der alte Pariser-Fuß verstanden, wovon 6 eine Toise machen.

§. 202.

Aus den bisherigen Beispielen wird man ersehen haben, daß die Bildung eines geometrischen Verhältnisses zwischen zwei gleichartigen Größen ganz einfach ist, wenn entweder der Werth der einen, unmittelbar durch die andere bestimmt ist, oder aber die Werthe beider durch eine dritte Größe ausgemessen worden, d. h. jeder Werth, in einer Zahl ausgedruckt ist, welcher die gleiche Einheit zu Grunde liegt. Diese Ausmessungen der Größen durch andere können auf verschiedene Weise vorgenommen werden, beruhen aber sämmtlich auf dem Satz, daß sich die Ganzen zu einander verhalten, wie die Anzahl der gleichen Theile, die sie enthalten, oder wie ihre Vielfachen. Nimmt man z. B. an, der württemb. Fuß sey mit dem Pariser verglichen worden, und man habe bei Anlegung des erstern an den letztern gefunden, daß der Pariser-Fuß den württembergischen ganz, sammt einem Theile, enthält, so kann man mit diesem Theil, den man als den Rest einer Division ansieht, wieder den Württemberger-Fuß ausmessen; bleibt abermals ein Rest, mit solchem wieder den vorigen Rest u. s. f., bis endlich eine Theilung aufgeht. Der letzte Rest ist nun das größte gemeinschaftliche Maaß beider Fußwerthe. In dem angenommenen Falle hat sich gefunden, daß die Quotienten nacheinander 1, 7, 2, 8 sind und daß der letzte Divisor = eine Par. Linie ist, weil gerade

$$1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8}}}$$

= 144 Theile = 12 Zoll × 12 Linien sind; der Werth des württemb. Fußes erscheint aus dem Nämlichen zu 127 solcher Theile oder Pariser-Linien; weßhalb derselbe der $\frac{127}{144}$te Theil eines Pariser-Fußes seyn muß und zu diesem sich verhält $= \frac{127}{144} : 1$.

Man kann aber auch sagen, weil eine Par. Linie das

größte gemeinschaftliche Maaß beider Fuße ist, so nehme man sie als Einheit für die Zahlen ihrer Werthe an; nach diesem ergiebt sich: 1 Par. Fuß : 1 württemb. = 144 : 127.

Auf diese Art sind die Werthe aller bekannten Längenmaaße mit dem Pariser-Fuß oder dem französischen Mètre zusammengestellt, und wir werden diejenigen, welche noch nicht vorgekommen und Interesse für uns haben können, am Ende dieses §. in Werthen der gangbarsten Maaße tabellarisch aufführen.

Das Verhältniß des württemb. Fußes zu dem Pariser muß aber auch gefunden werden, wenn man beide auf einer Linie, von dem gleichen Anfangspunkt an, so oft hinauslegt, bis jeder von ihnen in ein und derselben Länge genau ganz enthalten ist. Diese Länge ist nun nichts anders, als die kleinste, durch beide Fußwerthe ausmeßbare Zahl und wird gleich seyn : 1 württemb. Fuß × 144 oder 1 Par. Fuß × 127, weil aber beide Werthe eine gleiche Länge ausmachen, so kann man sie in Beziehung auf solche einander gleich setzen, und die Proportion 1 württemb. Fuß : 1 Paris. Fuß = 127 : 144, wie vorhin erhalten.

Was hier von dem Auffinden des Verhältnisses vom württemb. zum Pariser-Fuß gesagt worden ist, kann auf alle möglichen Längenvergleichungen angewendet werden.

I. Tafel für die Werthe einiger Längen-Grundmaaße.

Grundmaaß	ist gleich Pariser-Linien	ist gleich Mètres	ist gleich bairische Fuße	ist gleich preußische Fuße	ist gleich Rheinländ. Fuße	ist gleich Kalenberger Fuße	ist gleich badische Fuße
1 Fuß Rheinländ.	139,183	0,313973	1,07577	1,000381	1	1,07 94	1,0466
1 = Pariser	144,000	0,32484	1,1130	1,0350	1,03461	1,08582	1,0828
1 = Wiener	140,127	0,316103	1,080307	1,00717	1,00678	1,08123	1,0537
1 = Henneberger	138,24	0,311846	1,0685	0,9936	0,99322	1,06667	1,0395
1 = Englischer	135,1147	0,304796	1,04432	0,97114	0,97077	1,04255	1,01598
1 Mètre franz.	443,296	1	3,42631	3,1862	3,18599	3,42049	3,3333...
1 Fuß bairischer	129,38	0,29186	1	0,92992	0,92957	0,99830	0,97286
1 = württemb.	127,0	0,28649	0,98160	0,912815	0,91247	0,97994	0,95497
1 = badischer	132,9888	0,300...	1,0279	0,95586	0,95549	1,02615	1
1 = preußischer	139,13	0,31458	1,07286	1	0,99962	1,07353	1,0462

Der preußische und rheinländische Fuß sollten eigentlich ein und dasselbe Maaß seyn, aber die Anzahl der Pariser-Linien für einen rheinländ. Fuß wird in Paris zu 139,183 und für den preußischen in Berlin zu 139,13 angegeben; darum die zweierlei Verhältnisse in obiger Tafel.

§. 203.

In jedem Lande bildet man aus einer gewissen Anzahl Fußen oder Grundmaaßen wieder eine Längeneinheit, die gewöhnlich den Namen Ruthe erhält. An manchen Orten wird nun aus diesen Ruthen die Größe der landesüblichen Meile bestimmt. — Auch wird überall der Fuß oder das Grundmaaß in eine bestimmte Anzahl kleinerer Maaße, die einander gleich sind, ein solches Maaß wiederum in kleinere Theile u. s. f. abgetheilt. Zwar wurden in dieser Beziehung schon früher Beispiele gegeben, jedoch reichen dieselben nicht hin, dem Bedürfnisse zu genügen, welches der in gegenwärtiger Zeit so sehr erweiterte Verkehr in den praktischen Wissenschaften und dem Handel erheischt; darum seyen die Gesetze der für Deutschland wichtigsten Längenmaaße, in Beziehung auf die Vermehrung und Theilung ihrer Einheit, hier tabellarisch zusammengestellt:

II. Tafel für die Längeneinheiten.

Landesüblich in:	Zusammensetzung des Längen-Grundmaaßes.	Theilung des Längen-Grundmaaßes.
Frankreich (neues Maaß)	10 Mêtres = 1 Decamêtre 100 Mêtres = 1 Hectomêtre 1000 = = 1 Kilomêtre 10,000 = = 1 Myriamêtre 12 Decimêtres = 1 Aune (Elle) 2 Mêtre = 1 Toise (erlaubt. Mß.)	$0{,}1$ Mêtre = 1 Decimêtre $0{,}01$ = = 1 Centimêtre $0{,}001$ = = 1 Millimêtre $\frac{1}{3}$ Mêtre = 1 Pied $\frac{1}{12}$ Pied = 1 Doigt } erlaubte Maaße $\frac{1}{12}$ Doigt = 1 Ligne
(alt Pariser Maaß)	6 Fuß = 1 Toise	$\frac{1}{12}$ Fuß = 1 Zoll = 12 Linien.
Oesterreich	6 Fuß = 1 Klafter $2\frac{67}{144}$ Fuß = 1 Wiener Elle 4000 Klafter = 1 Meile	$\frac{1}{12}$ Fuß = 1 Zoll = 12 Linien $\frac{1}{12}$ Zoll = 1 Linie = 12 Punkte $\frac{1}{12}$ Linie = 1 Punkt = 12 Tertien
Preußen	12 Fuß = 1 Ruthe $2\frac{3}{4}$ Fuß = 1 Elle 2000 Ruthen = 1 Meile	$\frac{1}{12}$ Fuß = 1 Zoll = 12 Linien $\frac{1}{12}$ Zoll = 1 Linie = 12 Punkte $\frac{1}{12}$ Linie = 1 Pkt. = 12 Tertien

Landesüblich in:	Zusammensetzung des Längen-Grundmaaßes.	Theilung des Längen-Grundmaaßes.
Bayern	10 Fuß = 1 Ruthe $2\frac{41}{48}$ " = 1 Elle 25400 " = 1 Meile	$\frac{1}{12}$ Fuß = 1 Zoll = 12 Linien $\frac{1}{12}$ Zoll = 1 Linie = 12 Punkte $\frac{1}{12}$ Linie = 1 Pkt. = Tertien
Württemberg	10 Fuß = 1 Ruthe 2,144 " = 1 Elle 2600 Ruthen = 1 Postmeile	0,1 Fuß = 1 Zoll 0,01 " = 1 Linie 0,001 " = 1 Punkt u. s. w.
Baden	10 Fuß = 1 Ruthe 2 " = 1 Elle 29629,6 " = 1 Meile	0,1 Fuß = 1 Zoll 0,01 " = 1 Linie 0,001 " = 1 Punkt u. s. w.
Großh. Hessen	10 Zoll = 1 Fuß 24 " = 1 Elle 10 Fuß = 1 Klafter 3000 Klaft. = 1 Meile	1 Zoll = 10 Linien (1 Zoll = $\frac{1}{40}$ Mêtre = 25 Millimêtres) (1 Fuß = $\frac{1}{4}$ Mêtre = 25 Centimêtres) 1299 Zoll = 1200 alt Pariser-Zoll

Königreich Sachsen	2 Fuß = 1 Dresd. oder Leipz. Elle 2 Ellen = 1 Stab 1½ Stab = 3 Ell. = 6 Bauf. = 1 Kl. 1 Ruthe = 16 u. 12 Fuß. 5½ Ellen = 7 Fuß = 1 Berglacht. (1000 Dresd.-Fuß = 872 alt Par.F.) 16000 Ellen = 1 Polizei-Meile.	½ Elle = 1 Fuß 1 Fuß = 4 Vrtl. = 10 Dezimalz. = 12 gemeine Zoll ⅛ Berglachter = 1 Schuh = 10 Lachterz. 0,1 L. Schuh = 1 L. Zoll = 10 L. Primen 0,1 L. Zoll = 1 Prime = 10 Sekunden 1 Stück Garn = 19200 Ellen.
England	3 Fuß = 1 Yard 5½ Yards = 1 Ruthe 220 Yards = 1 Fourlong 1760 Yards = 1 Landmeile.	1/12 Fuß = 1 Zoll = 12 Linien 1¼ Yards = 3¾ Fuß = 1 Leinewand-Elle. 6 2/8 5/11 Yards = 1 Boy- u. Fries-Gode.

§. 204.

Mittelst der zwei Tafeln ist es leicht das Vielfache, so wie die Theile eines Längengrundmaaßes in einem andern Längenwerthe zu finden. Z. B. man will wissen, wie viel 6 englische Leinwand-Ellen, württemb. Ellen ausmachen, so ist bekannt, daß 1 engl. Leinwand-Elle $= 1\frac{1}{4}$ Yards $= \frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4}$ engl. Fuße; auch daß 1 württemb. Elle $= 2{,}144$ württemb. Fuße; nun hat 1 engl. Fuß nach Tab. I. $0{,}304796$ Mêtres, daher 1 englische Leinwand-Elle $= 0{,}304796 \times \frac{15}{4} = 1{,}142985$ Mêtres. Der württemb. Fuß hat $0{,}28649$ Mêtres, deßhalb 1 württemb. Elle $= 0{,}28649 \times 2{,}144 = 0{,}61423456$ M. Die beiden Längen sind auf diese Art in dem gleichen Zahlensysteme ausgedruckt, wodurch man in den Stand gesetzt ist, zu untersuchen, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Der Forderung gemäß erhält man nun 1 engl. L. E. $= \frac{1{,}142985}{0{,}61423456}$ württemb. Ellen $= 1{,}86083$ württemb. Ell. Sollen nun die Dezimaltheile des letztern Werths auf die übliche Eintheilung der württemb. E. in Halbe, Viertels, Achtels u. s. w. Ellen gebracht werden, so darf man die Dezimalen nur mit den Nennern dieser Ellentheile multipliciren; also:

$0{,}86083 \times 2 = 1{,}72166 =$ 1 halbe Elle $+ 0{,}72166$

$0{,}72166 \times 2 = 1{,}44332 =$ 1 Viertels-Elle $+ 0{,}44332$

$0{,}44332 \times 2 = 0{,}88664 = 0{,}88664$ Achtels-Ellen

$0{,}88664 \times 2 = 1{,}77328 = 1\frac{77}{100} = 1\frac{10}{13}$ Sechszehntels-Elle.

Die Verwandlungen zusammen haben nun ergeben: 1 engl. Leinwand-Elle $=$ 1 Elle $+$ 1 halbe Elle $+$ 1 Viertel-Elle $+ 1\frac{10}{13}$ Sechszehntheil $= 1\frac{1}{2}$ Elle $+$ 1 Viertel $+ 1\frac{10}{13}$ Sechszehntheil württemb.

§. 205.

Sowohl in der vermehrenden Rechnungsart mit benannten Zahlen, als in der Geometrie, ist der Beweis enthalten, daß sich die Inhalte der Quadrat- oder Flächenmaaße zu ein-

ander verhalten müssen, wie die Quadratzahlen *) der Längenwerthe ihrer Seiten; vorausgesetzt, daß diese Zahlen ein Vielfaches der gleichen Einheit sind. Da die Seite des württemb. Quadratfußes = 127 Par. Lin. und die des Pariser Quadrat = = 144 = =, so verhält sich

1'□ württemb. : 1'□ Paris. = 127^2 : 144^2

= 16129 : 20736

d. h. die Fläche eines württemb. Quadratfußes enthält 16129, während die des Par. Quadratfußes 20736 Pariser Quadratlinien enthält; es ist demnach die Pariser Quadratlinie die gemeinschaftliche Einheit für die beiden Verhältnißzahlen.

Wenn man das Verhältniß des württemb. Dezimalquadratzolles zu dem Pariser Duodezimalquadratzoll finden soll, so geht folgende Betrachtung voraus: da 1 württemb. Längenzoll = 0,1 seines Fußes ist, so gehen auf ihn $\frac{127}{10}$ = 12,7 Par. Linien;

1 Par. Längenzoll ist $\frac{1}{12}$ seines Fußes, oder hat $\frac{144}{12}$ = 12 Pariser Linien; daher

1''□ württemb. : 1''□ Par. = $\overline{12,7}^2$: 12^2

= 161,29 : 144,0

Diese Werthe kann man aber auch aus den vorigen Verhältnißzahlen so folgern: der württemb. Quadratfuß hat 100 Quadr.Zoll, oder 1 □Zoll ist der $\frac{1}{100}$te Theil des ersteren; daher dividire man den Werth des Quadratfußes in Pariser Quadratlinien durch 100; der Pariser Quadratfuß aber hat 144 Quadratzoll oder 1 Quadratzoll ist der $\frac{1}{144}$ Flächentheil von seinem Quadratfuß, also muß dessen Werth durch 144 dividirt werden, um zu erfahren, wie viel Qua-

*) Eine Quadratzahl heißt das Produkt aus zwei Faktoren, die einander ganz gleich sind, oder aus einer Zahl durch sich selber. Zur Bezeichnung eines solchen Produkts fügt man der betreffenden Zahl rechts oben die Anzahl der Faktoren, in diesem Falle also 2 klein an. Z. B. 144^2 heißt 144 × 144 oder 144 im Quadrat, eine Quadratzahl.

dratlinien 1 Quadratzoll hat; dieses Verfahren muß das nämliche Resultat geben.

Noch allgemeiner ist die Entwicklung:

1 württem. Läng.Fuß = 10 Zoll = 127 Par. Lin.
1 " " Zoll = $\frac{1}{10}$ Fuß = $\frac{127}{10}$ " "
1 Pariser Läng.Fuß = 12 Zoll = 144 " "
1 " " Zoll = $\frac{1}{12}$ Fuß = $\frac{144}{12}$ " "

Nun ist:

1 württ. □Fuß = 1×1 F. = 10×10 Z. = 127×127 P.Lin.
= 1^2 " = 10^2 " = 127^2 " "
1 " □Zoll = 1×1 Zoll = $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ F. = $\frac{127}{10} \times \frac{127}{10}$ " "
= 1^2 " = $\frac{1^2}{10^2}$ " = $\frac{127^2}{10^2}$ " "
1 Pariser □F. = 1×1 F. = 12×12 Z. = 144×144 P.Lin.
= 1^2 " = 12^2 " = 144^2 " "
1 " □Z. = 1×1 Z. = $\frac{1}{12} \times \frac{1}{12}$ F. = $\frac{144}{12} \times \frac{144}{12}$ " "
= 1^2 " = $\frac{1^2}{12^2}$ F. = $\frac{144^2}{12^2}$ " *)

§. 206.

Anstatt weiterer Verbreitung über die Berechnung der Flächenmaaßverhältnisse wollen wir nun eine Zusammenstellung deren Einheiten in Werthen des Quadrat-Mètre und des Pariser Quadratfußes geben, und es Anfängern überlassen, durch Anwendung der im vorigen Beispiele gegebenen Grundsätze nachstehende Resultate selbst zu entwickeln. Die Lauteschläger'schen Berechnungen weichen von diesen öfters sehr stark ab, und sind deßhalb fehlerhaft.

*) Weil der Faktor 1 eine Zahl nicht vermehrt, so wird künftig die Quadratzahl von 1 nimmer bezeichnet.

III. Tafel der Flächenmaaße.

Französische Flächenmaaße.

1 Centiare	= 1/100 Ares	= 1 □Mètre	= 9,4782	Par. □Fuſs
1 Déciare	= 1/10 =	= 10 = =	= 94,782	= = =
1 Are	= 10 Déciares ...	= 100 = =	= 947,82	= = =
1 Decare	= 10 Ares	= 1000 = =	= 9478,2	= = =
1 Hectare	= 100 =	= 10000 = =	= 94782,0	= = =
1 Kilare	= 1000 =	= 100000 = =	= 947820,0	= = =
1 Myriare	= 10000 Ares	= 1000000 = =	= 9478200,0	= = =
1 □Toise, altes M.		= 3,79874 = =	= 36,0	= = =

Oesterreichisches Flächenmaaß.

	1 □Fuß	= 0,099921 □Mètres	= 0,946932 Par. □F.
1 Klafter	= 36 □ =	= 3,59715 = =	= 34,08955 = = =
1 Joch	= 1600 □Kl.	= 5755,442 = =	= 54543,29 = = =

Preußisches Flächenmaaß.

	1 □F.	= 0,0985402 □Mètres	= 0,933504 Par. □F.
144 □Fuß	= 1 □Ruthe	= 14,18458 = =	= 134,4247 = = =
180 □Rth.	= 1 Morgen	= 2555,225 = =	= 24196,444 = = =

Bairisches Flächenmaaß.

	1 □Fuß	= 0,0851818 □Mètres	= 0,807252 Par. □F.
100 □Fuß	= 1 □Ruthe	= 8,51818 = =	= 80,7252 = = =
400 □Rth.	= 1 Morgen	= 3407,27 = =	= 32290,09 = = =

Nürnberger Flächenmaaß (1 Läng. Fuß = 134,67 Par. Lin.)

	1 □Fuß	= 0,09229 □Mètres	= 0,874615 Par. □F.
a) 256	□F. = 1 □Rthe	= 23,6262 = =	= 223,9014 = = =
	200 □Rthn = 1 Mrgn	= 4725,243 = =	= 44780,28 = = =
b) 144	□F. = 1 □Rthe	= 13,28975 = =	= 125,9445 = = =
	160 □Rthn = 1 Acker	= 2126,36 = =	= 20151,122 = = =

Württembergs Flächenmaaß.

1 □Fuß = 0,0820767 □Mètres = 0,777826 Par.□F.
100 □F. = 1 □Rthe = 8,20767 = = = 77,7826 = = =
384 □Rthn = 1 Morg. = 3151,745 = = = 29868,52 = = =
36 □Fuß = 1 □Klaft. = 2,95476 = = = 28,00173 = = =

Königlich sächsisches Flächenmaaß (1 Läng.F. = 125,568 Par. Lin.)

1 □Fuß = 0,0823362 □Mètres = 0,760384 Par.□F.
230 □Fuß = 1 □Rthe = 18,454324 = = = 174,8883 = = =
300 □Rthen = 1 Acker = 5536,3 = = = 52466,5 = = =

Badische Flächenmaaße.

1 □Fuß = 0,09 □Mètres = 0,852936 Par.□F.
100 □Fuß = 1 □Ruthe = 9,0 = = = 85,29136 = = =
100 □Rth. = 1 Vtl. = 900,0 = = = 8529,136 = = =
4 Vtl. = 1 Morgen = 3600,0 = = = 34117,53 = = =

Großh. hessische Fl.M. (1 L.F. = 110,82397 Par.Lin.)

1 □Fuß = 0,0624999 6 □Mètres = 0,592301 = =
100 □Fuß = 1 □Klafter = 6,249996 = = = 59,2301 = =
100 Kl. od. Ruth. = 1 Vtl. = 624,9996 = = = 5923,01 = =
4 Vtl. = 1 Morgen = 2499,9993 = = = 23692,04 = =

Churfürstl. hessische Fl. M. (1 Läng. F. = 126,3 Par. Lin.)

1 □Fuß = 0,0811744 □Mètres = 0,769275 Par.□F.
$\frac{14\times14}{196}$ □Fuß = 1 □Ruthe = 15,91019 □Mètres = 150,778 = = =
150 □Ruthen = 1 Acker = 2386,528 □Mètres = 22616,7 = = =

Hanövrische Flächenmaaße.

1 Kalenberg. □Fuß = 0,0854717 □Mètres = 0,81000 Par.□F.
$\frac{16\times16}{256}$ □Fuß = 1 □Ruthe = 21,8808 = = = 207,36 = = =
120 □Ruthen = 1 Morgen = 2625,69 = = = 24883,2 = = =

Englische F.M. (1 Läng. Yard = 3 Fuß = 405,3441 Par. Lin.)

1 □Yard = 0,836104 □Mètres = 7,923605 Par.□F.
1210 □Y. = 1 Rood of Land = 1011,686 □Mètr. = 9587,562 " " "
4840 □ " = 1 Acre = 4046,743 " " = 38350,244 " "
$\left.\begin{matrix}5,5\times5,5\\30,25\end{matrix}\right\}$ □Y. = 1 □Ruthe = 25,29214 " " = 239,68906 " "
160 □Ruthen = 1 Acre = 4046,743 " " = 38350,244 " "

Russische Flächenmaaße (1' Länge = 135,1147 Par. Lin.; 1 Arschine = 345,4 Par. Lin.)

1 □Arschine = 0,506214 □Mètre = 4,797322 Par.□F.
1 □Saschè = 3×3 Arsch. = 4,55594 " " = 43,1759 " " "
2400 Sas. = 1 Désaetine = 10934,3 " " = 103622,03 " " "
3200 " = 1 $\left\{\begin{matrix}\text{ökonom.}\\\text{Desätine}\end{matrix}\right.$ = 14579,02 " " = 138162,73 " " "

Polnische Fl.M. (1 L.F. oder Stopa = 127,669 Par. Lin.

1 □Stopa = 0,082944 □Mètres = 0,786054 Par.□F.
1 □Ruthe = $\left.\begin{matrix}15\times15\\225\end{matrix}\right\}$ □Stopa = 18,6624 " " = 176,8602 " " "
1 Morgen = 300 □Ruthen = 5598,72 " " = 53058,06 " " "
1 Hufe = 30 Morgen = 167961,6 " " = 1591742,0 " " "

§. 207.

Es wurde schon früher gesagt, daß man sich die Einheiten der kubischen oder Körpermaaße als derartige Würfel denkt, welche sich um die gleiche Längeneinheit nach den drei Hauptrichtungen des Raumes, der Länge, der Breite und der Höhe ausdehnen, oder welche von den Quadraten der Flächeneinheiten begränzt sind. Man kann sonach dieselben als ein Produkt aus den drei Faktoren ihrer Längeneinheiten ansehen, wenn man solches als die Zahl ihres Werthes nimmt, so daß $1 \times 1 \times 1$ Längenfuß $= 1$ Kubikfuß $= 1^3$ Fuß bedeutet.

Ein Kubikzoll, der nach den drei Raumausdehnungen je

einen Längenzoll mißt, und zur Seitenfläche einen Quadratzoll hat, kann auf die Grundfläche des Quadratfußes so oft gelegt werden, als solcher Quadratzolle enthält; also bei der Dezimaltheilung $= 10 \times 10 = 100$ oder 10^2 mal. Da diese Lage von Kubikzollen nur eine Höhe von 1 Längenzoll einnimmt, und der Kubikfuß 10 Zoll hoch ist, so wird man einsehen, daß dessen Raum oder Inhalt 10 solcher Lagen oder Schichten, d. h. $10 \times 10 \times 10 = 1000 = 10^3$ Kubikzolle in sich aufnehmen kann. Ebenso verhält es sich mit der Anzahl der Theile der übrigen Kubikeinheiten. Z. B. eine 6schuhige Kubikklafter, d. h. ein Raum, dessen Länge, Breite und Höhe $= 6$ Fuß ist, enthält $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ Kubikfuße. — Wären die drei gleichen Ausdehnungen eines Würfels größer oder kleiner als ein bestimmter Fuß, und man will die Anzahl der Kubikzolle, welche letzterem entsprechen und in dem Würfel enthalten seyn können, wissen, so darf man nur mit einem Maaßstabe, der in die Zolle des Fußes getheilt ist, eine Dimension oder Kante des Würfels abmessen und die beobachtete Zahl der Zolle zu einem Produkt erheben, wozu sie dreimal der Faktor ist. In Beziehung auf den erzeugten Werth nennt man ein solches Produkt eine Kubikzahl und zwar schon ehe die Multiplication wirklich ausgeführt, sondern wenn nur der einfache Faktor mit der Ziffer bezeichnet ist, die anzeigt, daß er es dreimal seyn muß. Z. B. 4^3 ist eine Kubikzahl und heißt 4 im Kubus oder 4 in der dritten Potenz und ist soviel als $4 \times 4 \times 4$.

Betrachtet man den an einem Orte üblichen Kubikfuß als das Normalmaaß zur Vergleichung der anderwärts gebräuchlichen Raummaaße, so sind letztere entweder größer oder kleiner als derselbe und um wie viel, könnte man durch beiderseitiges Zerlegen in gleiche Raumtheile erfahren. Nach dem so eben Abgehandelten ist es aber genug, die Größe (oder die Anzahl Theile) oder die Länge der Seite des Würfels, welche jederzeit der landesübliche Längenfuß ist, zu kennen, um seinen Rauminhalt zu folgern. Theilt man daher den Längenfuß

des Normal-Würfels in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile; und mißt mit dem erhaltenen Maaßſtabe eine Durchſchnittslinie der Quadratflächen, oder was das Nämliche iſt, den Längenfuß eines andern Ortes ab, ſo laſſen ſich die Raumwerthe beider Würfel in Zahlen der gleichen Einheit finden, und daher in ein Verhältniß ſtellen. Nun ſind aber alle bekannten Längenmaaße mit dem franzöſiſchen Mètre und dem Pariſer Fuße verglichen, wobei letzter in $12 \times 12 = 144$ Linien zerlegt iſt; deßhalb wurde es auch für das Einfachſte gehalten, den Kubik-Mètre, welcher 1 Stère heißt, oder den Pariſer Kubikfuß als Normalmaaß, oder als Einheit für die Werthe der Raumverhältniſſe anzunehmen, wodurch natürlich wiederum die Vergleichung zweier beliebiger Kubikmaaße unter ſich möglich iſt. — Wird nun gefordert, das Verhältniß des Pariſer Kubikfußes zu dem württembergiſchen zu ſuchen, ſo iſt das einfache Verfahren hiezu Folgendes:

Man weiß, der württembergiſche Längenfuß hat 127 Pariſer Linien; alſo der württembergiſche Kubikfuß $= 127 \times 127 \times 127 = 127^3$ Pariſer Kubiklinien; da nun der Pariſer Kubikfuß $= 144 \times 144 \times 144 = 144^3$ Pariſer Kubiklinien enthält, ſo ſtehen dieſe gleichnamigen Werthe im Verhältniß:

1 Pariſ. Kubikfuß : 1 württemb. Kubikfuß $= 144^3 : 127^3$

$$1^{/Cq.}\text{ Par.} : 1^{/Cq.}\text{ württemb.} = 1 : \frac{127^3}{144^3}$$

$$= 1 : 0{,}6860$$

Der Werth des Längen-Mètre iſt in Pariſer Linien $= 443{,}296$; daher 1 Kubik-Mètre oder 1 Stère $= \overline{443{,}296}^3$ Pariſer Kubiklinien und das Verhältniß:

$$1 \text{ Stère} : 1 \text{ württemb. Kubikfuß} = \overline{443{,}296}^3 : 127^3$$

$$= 1 : \frac{127^3}{\overline{443{,}296}^3}$$

woraus man erhält $= 1 : 0{,}023514_2$

Im Allgemeinen ergiebt ſich die Regel für die Vergleichung der Rauminhalte zweier Würfel: „daß ſich dieſe zu ein-

„ander verhalten, wie die Kubikzahlen ihrer Kanten in einer„lei Maaße ausgedruckt; was bei der Anwendung auf die „Körperfuße so viel heißt, als wie die Kubikzahlen der Pari„ser Linien oder beliebiger Längentheile, welche den Werth „der entsprechenden Längenfuße ausmachen.“

§. 208.

Die Raummaaße sind im praktischen Leben von großer Wichtigkeit, da sowohl feste als flüßige Körpermassen durch sie beurtheilt werden. Zur Ausmessung der zusammenhängenden festen Körper bedient man sich des Längenmaaßes in der Art, wie es die körperliche Geometrie erfordert; aber zur Vergleichung der Flüssigkeiten und der Massen kleiner getrennter Körper, wie Körner, Sand, Kohlen, Knollengewächse u. s. w. sind sogenannte Hohlmaaße eingeführt, deren Umfang einen leeren Raum einschließt, welcher mit den abzumessenden Gegenständen angefüllt werden kann und dessen Inhalt nach Kubikfußen oder seinen Theilen gesetzlich bestimmt ist. Die folgende Tafel wird nicht nur die in verschiedenen Ländern angenommene Größe und Eintheilung der Hohlmaaße, sondern auch die Reduktion ihrer Raumgehalte nach der vorhin aufgestellten Berechnungsart auf Stères und Pariser Kubikfuße enthalten, so daß man durch sie in den Stand gesetzt wird, das Verhältniß irgend eines Raummaaßes zu einem andern sogleich einsehen zu können.

Die Berechnung der Kubikellen und Kubikmeilen, welch' letztere etwa in der physikalischen Geographie vorkommen möchten, habe ich füglich unterlassen können, da dieselbe keine Schwierigkeiten darbietet, wenn die bisher gegebenen Notizen richtig aufgefaßt worden sind, wozu gewiß die Ausführlichkeit des Vortrags allen Vorschub zu leisten im Stande ist.

IV. Tafel für die Werthe der Raummaaße.

In Frankreich.

1³ Mètre	=	1	Stère	=	29,1739	Cq. Par. Fuß
1 Décistère	=	0,1	"	=	2,91739	" "
1 Centistère	=	0,01	"	=	0,291739	" "
1 Litre	=	0,001	"	=	0,029174	" "
1 Decilitre = $\frac{1}{10}$ Litre	=	0,0001	"	=	0,0029174	" "
1 Centilitre = $\frac{1}{100}$ "	=	0,00001	"	=	0,00029174	" "
1 Décalitre = 10 Litres	=	0,01	"	=	0,291739	" "
1 Hectolitre = 100 "	=	0,1	"	=	2,91739	" "
1 Kilolitre = 1000 "	=	1,0	"	=	29,1738607	" "
1 Boisseau = $\frac{1}{8}$ Hectolitre	=	0,0125	"	=	0,3646733	" "
1 double Bois. = $\frac{1}{4}$ Hect.	=	0,025	"	=	0,729346	" "
1³ Par. Fuß (alt.)	=	0,03428	"	=	1	" "
1³ Par. Toise	=	7,40389	Stères	=	216,0	" "
1 Setier = 8 Pintes	=	0,156	Stère	=	4,55	" "

In Oesterreich.

1³ Fuß	=	0,031585	Stère	=	0,921464	Cq. Par. Fuß
1³ Klafter = 216 Cq. Fuß	=	6,822414	Stères	=	199,03616	" "
1 Metze = 1,9471 Cq. Fuß	=	0,0614996	Stère	=	1,794182	" "

(In Oesterreich.)

1 Muthe = 30 Metzen	=	1,844988 Stères	=	53,82546 Cq. Par. Fuß
1 Maas = 77,4144 Cq. Zoll	=	0,00141502 Stère	=	0,0412816 " "
1 Eimer = 40 Maas	=	0,0566008 "	=	1,651263 " "

In Preußen.

1^3 Fuß	=	0,03091584 Stère	=	0,9019344 Cq. Par. Fuß
1 Scheffel = 3072 Cub. Zoll	=	0,0549615 "	=	1,60344 " "
1 Metze = $\frac{1}{16}$ Scheffel	=	0,003435 "	=	0,100215 " "
1 Eimer	=	0,068702 "	=	2,0043 " "
1 Quart = $\frac{1}{60}$ Eim. = $\frac{1}{3}$ Metze	=	0,00114503 "	=	0,033405 " "
1 Biertonne = 100 Quart	=	0,114503 "	=	3,3405 " "
1 Tonne Salz, Kalk, Asche	=	0,219846 "	=	6,41376 " "
1^3 Klftr. = $\frac{6 \times 6 \times 5}{108}$ C.F.	=	3,3389105 "	=	97,4089 " "
1 Krumme = $\frac{6 \times 4 \times 1}{24}$ C.F.	=	0,628626 "	=	18,33944 " "
1^3 Ruthe = 5 Krummen	=	3,14313 "	=	91,6972 " "
1 Last = 72 Scheffel	=	3,95725 "	=	115,4476 " "

In Baiern.

1^3 Fuß	=	0,0248611 Stère	=	0,725294 Cq. Par. Fuß

1 Metzen $= \frac{8{,}944}{6}$ Cub.Fuß	=	0,0370596	=	=	1,08117	= =
1 Scheffel = 6 Metzen	=	0,2223575	=	=	6,48703	= =
1 Maas = 45‴ Cub.Dec.	=	0,00106903	=	=	0,031188	= =
1 Eimer = 64 Maas	=	0,0684177	=	=	1,99601	= =
1 Holzkl. $= \frac{6 \times 6 \times 3\frac{1}{2}}{126}$ C.F.	=	3,1525	=	=	91,587	= =

In Württemberg.

1^3 Fuß	=	0,0235142 Stère		=	0,6860$^{Cq.}$	Par. Fuß
1 Simri = 942‴,125 Cub.	=	0,0221533	=	=	0,64630	= =
1 Scheffel = 8 Sri.	=	0,177226	=	=	5,170376	= =
1 Maas = 78‴,125 Cub.	=	0,00185705	=	=	0,0535937	= =
1 Eimer = 160 Maas	=	0,295927	=	=	8,5750	= =
1 Lachter = 100 Cub.Fuß	=	2,35142	=	=	68,60	= =

Im Königreich Sachsen.

1^3 Fuß	=	0,0227277 Stère		=	0,663055$^{Cq.}$	Par. Fuß
1 Scheffel	=	0,1074314	=	=	3,13426	= =
1 Kanne	=	0,00093628	=	=	0,027315	= =
1 Eimer = 63 Kannen	=	0,0589855	=	=	1,720854	= =

In Baden.

1^3 Fuß	=	0,027	Stère	=	0,787694$^{Cq.}$	Par. Fuß
1 Cub.Kl. $= \frac{6\times6\times4}{144}$ C.F.	=	3,888	"	=	113,428	" "
1 Zuber	=	1,50	"	=	43,761	" "
1 Stütze = 1 Seſter = 15 Litres	=	0,015	"	=	0,43761	" "
1 Maas = $\frac{1}{10}$ Stütze	=	0,0015	"	=	0,043761	" "
1 Malter = 10 Seſter	=	0,15	"	=	4,3761	" "

Im Großherzogthum Heſſen.

1^3 Fuß	=	0,015625	Stère	=	0,45584$^{Cq.}$	Par. Fuß
1^3 Ruthe = 1000 Cub.Fuß	=	15,625	"	=	455,841	" "
1 Stecken = 100 " "	=	1,5625	"	=	45,5841	" "
1 Schoppen = 32 Cub.Zoll	=	0,0005	"	=	0,014587	" "
1 Maas = 4 Schoppen	=	0,002	"	=	0,058348	" "
1 Ohm = 80 Maas	=	0,16	"	=	4,66782	" "
1 Malter = 256 Schoppen	=	0,128	"	=	3,73425	" "
Kohlenmß $= \frac{50\times40\times20}{40,000}$ Cb.Z.	=	0,625	"	=	18,23364	" "
Kalkmaaß = 10 Cub.Fuß	=	0,15625	"	=	4,5584	" "

Im Churfürstenthum Hessen.

1^3 Fuß Feldmaaß	=	0,0251275	Stère	=	0,674719 Cq.	Par. Fuß
1^3 Forstfuß (127,6 P. L. lang)	=	0,025849	=	=	0,69577	= =
1^3 Forstklf. $= \frac{5 \times 5 \times 6}{150}$	=	3,57735	=	=	104,3652	= =
1 Scheffel	=	0,0803695	=	=	2,34468	= =
1 Weinmaas	=	0,001984 . . .	=	=	0,05789	= =
1 Biermaas	=	0,0021829	=	=	0,063683	= =
1 Weinfuder = 6 Ohm = 120 Viertel = 480 Maas	=	0,95253	=	=	27,789	= =

In Hannover

(den Längenfuß in neuerer Zeit zu 129,44 Par. Lin. gerechnet).

1^3 Fuß	=	0,0248957	Stère	=	0,726305 Cq.	Par. Fuß
1 Getraide Himten	=	0,031167	=	=	0,909259	= =
1 Malter = 6 Himten	=	0,187002	=	=	5,455354	= =
1 Last = 16 Malter	=	2,992032	=	=	87,285664	= =
1 Quartier Wein	=	0,009804	=	=	0,286	= =
1 Maas oder 1 Kanne = 2 Q.	=	0,019608	=	=	0,572	= =
1 Stübchen = 4 Quartier	=	0,039216	=	=	1,1440	= =
1 Anker = 40 =	=	0,39216	=	=	11,440	= =

(In Hannover.)

(den Längenfuß in neuerer Zeit zu 129,44 Par. Lin. gerechnet)

1 Eimer	= 64 Quartier	=	0,627455 Stère	=	18,3052$^{Cq.}$	Par.	Fuß
1 Ohm	= 160 "	=	1,56861 "	=	45,763	"	"
1 Orhoft	= 240 "	=	2,35296 "	=	68,6444	"	"
1 Bräu Bier	= 172 Tonnen oder 4472 Stübchen	=	87,687 "	=	2558,15	"	"

In Großbritannien.

1^3 Fuß		=	0,02831564 Stère	=	0,8260766$^{Cq.}$	Par.	Fuß
1 Load Schiffs-Krummh.	= 50′ C. =		1,415782 "	=	41,30383	"	"
1 Schiffslast	= 42 Cub. Fuß	=	1,18926 "	=	34,69522	"	"
1 Gallon impérial		=	0,0045454 "	=	0,132551	"	"
1 Quart	= $\frac{1}{4}$ Gallon	=	0,00113586 "	=	0,03313772	"	"
1 Pinte	= $\frac{1}{8}$ Gallon	=	0,0005554 "	=	0,01657	"	"
1 Peck	= 2 Gallons	=	0,009087 "	=	0,265102	"	"
1 Bushel	= 8 "	=	0,0363477 "	=	1,060407	"	"
1 Sack	= 3 Bushel	=	0,109043 "	=	3,181221	"	"
1 Quarter	= 8 Bushel	=	0,2907813 "	=	8,48326	"	"
1 Chaldron	= 12 Sacks	=	1,308516 "	=	38,17465	"	"

In Rußland.

1^3 Fuß	=	0,028316 Stère	=	0,826077$^{Cq.}$	Par. Fuß
1^3 Arschine	=	0,36017 "	=	10,50746 "	"
1 Tschetwert	=	0,205486 "	=	5,9948 "	"
1 Osmin = $\frac{1}{2}$ Tschetwert	=	0,102743 "	=	2,9974 "	"
1 Pajok = $\frac{1}{4}$ "	=	0,0513715 "	=	1,4987 "	"
1 Tschetwerik = $\frac{1}{8}$ Tschetwert	=	0,0256858 "	=	0,74935 "	"
1 Garnetz = $\frac{1}{64}$ "	=	0,0032107 "	=	0,09367 "	"
1 Eimer	=	0,012695 "	=	0,370370 "	"
1 Tschetwerki = $\frac{1}{4}$ Eimer	=	0,0031738 "	=	0,092593 "	"
1 Osmuschki = $\frac{1}{8}$ "	=	0,001587 "	=	0,04630 "	"
1 Weinanker = 40 Par. Pinten	=	0,03725 "	=	1,0868 "	"

In Polen

(Längen-Elle = 255,338 Par. Lin.).

1^3 Fuß	=	0,0238879 Stère	=	0,6969015$^{Cq.}$	Par. Fuß
1^3 Elle = 8 Cub. Fuß	=	0,194103 "	=	5,575211 "	"
1^3 Klftr. = $\frac{3 \times 3 \times 3}{27}$ Cub. Ell.	=	5,15978 "	=	150,5307 "	"
1 Quart = 1 franz. Litre	=	0,001 "	=	0,02917 "	"

(In Polen)

(Längen-Elle = 255,338 Par. Lin.).

1 Garnitze = 4 Quart	=	0,004	Stere	=	0,116696$^{cq.}$	Par. Fuß
1 Viertel = 32 Quart	=	0,032	"	=	0,93357$^{cq.}$	" "
1 Scheffel = 128 "	=	0,128	"	=	3,734272	" "
1 Last = 30 Scheffel	=	3,840	"	=	112,02816	" "
1 Tonne = 100 Quart	=	0,1	"	=	2,9174	" "
1 Garniec = $\frac{1}{4}$ Tonne	=	0,025	"	=	0,72935	" "

In Nelkenbrechers Taschenbuch der Münz-, Maaß- und Gewichtskunde sind alle möglichen Maaße aufgeführt, aber selten mit der nöthigen Schärfe; jedoch möchten dieselben in denjenigen Fällen genügend erscheinen, wenn es sich um ein Raummaaß handelt, dessen Werth hier nicht angegeben worden ist. Auf die mangelhafte Zusammensetzung, und die gröblichen Fehler des obigen Werkes (15te Auflage 1832) werde ich in einer künftigen Ausarbeitung zurückkommen.

§. 209.

Bei der Auflösung des Beispiels §. 201. Nro. 1 ist zwar schon erklärt worden, was unter einem geometrischen Verhältnisse verstanden wird: nämlich die Vergleichung zweier Größenwerthe von einerlei Art in einem beliebigen, aber demselben Zahlensysteme; jedoch wurde dort nicht näher nachgewiesen, wie ein solches Verhältniß auch dazu dient, die verschiedenen Einheiten einer Maaßordnung auf Zahlen einer andern zu bringen, bei welchen die Grundeinheit sowohl, als deren Zusammensetzung und Theilung zu andern Einheiten, von jenen verschieden ist. Es heißt dieß nichts anders, als man ist durch ein gegebenes Verhältniß in den Stand gesetzt, den Werth einer der beiden Größen in eine Zahl zu verwandeln, zu welcher die andere die Einheit ist; oder, was das Nämliche heißt, man kann finden, den *wievielten* Theil die eine von der andern ausmacht. Wenn man sich in der Anwendung dahin ausspricht, irgend eine Maaßzahl auf die Geltung einer andern zu bringen, so versteht man darunter: „*Die Größe, welche durch die Zahl als bekannt angesehen wird, solle nun mit einer an Ausdehnung von der vorigen, abweichenden Einheit ausgemessen und angegeben werden, wie oft letztere in dem gegebenen Werthe enthalten ist.*“ Dieses zeigt aber in der Arithmetik der Quotient an, daher man nur mit der vorhandenen Werthzahl der neuen Einheit in die Größenzahl dividiren darf, vorausgesetzt, daß beiden Werthen die nämliche Einheit zu Grunde liegt; z. B. es ist eine Länge von 1566 Pariser Längenlinien bekannt, welche in Pariser Fuße verwandelt werden solle, d. h. man will wissen, *wieviele* Pariser Längenfuße auf die gegebene Linie gelegt werden können. Nun weiß man, daß 1 Pariser Fuß zwölftheilig ist, und daher $12 \times 12 = 144$ Linien enthält; demnach kann man die Gleichungen setzen:

1) 1 Par. F. = 144 Par. Linien;
2) x Par. F. = 1566 Par. Linien.

Es muß 1 in x ebenso oft enthalten seyn, wie 144 in 1566, weil Gleiches in Gleiches dividirt einen gleichen Quotienten giebt; aber 1, das allgemeine Maaß der Zahlen, verändert weder durch Multiplication, noch durch Division, eine Zahl, daher bleibt:

$$x = \frac{1566}{144} = 10{,}875 \text{ Par. Fuß.}$$

Wäre verlangt worden, die gegebenen Pariser Linien in spanische Fuße zu verwandeln, so könnte dieß ebenso leicht geschehen, wenn man wüßte, welche Länge ein spanischer Fuß im Pariser Maaße hat. Durch eine Vergleichung ist derselbe zu 125,3 Pariser Linien gefunden worden; sonach die ähnlichen Gleichungen wie vorhin gesetzt:

1) 1 spanischer Fuß = 125,3 Par. Lin.
2) x spanische Fuße = 1566,0 " "

und $$x = \frac{1566{,}0}{125{,}3} = 12{,}5 \text{ spanische Fuße;}$$

d. h. 12,5 spanische Fuße haben die nämliche Länge wie 1566,0 Pariser Linien.

Wird gefordert, eine bekannte Länge von 377 Pariser Fußen in einer Zahl spanischer Fuße, welche die nämliche Länge bedeutet, anzugeben, so reicht das Verhältniß des Pariser Fußes zum spanischen Fuße = 144 : 125,3 hin, gedachter Forderung zu entsprechen; denn wenn man die 377 Par. F. in Par. Linien verwandelt, was durch Multiplication mit 144 geschieht, indem auf jede Einheit der Fußzahl soviel Linien kommen, so hat man wieder den vorigen Fall; es ist somit:

1) 1 spanischer Fuß = 125,3 Par. Lin.;
2) x spanische Fuße = $377 \times 144{,}0$ Par. Lin.;

woraus sich ergiebt:

$$x = \frac{377 \times 144{,}0}{125{,}3}$$

oder was einerlei iſt:

$$x = \frac{144{,}0}{125{,}3} \times 377 \text{ ſpaniſche Fuße.}$$

Dividirt man mit 125,3 in 144,0 wirklich, ſo zeigt der Quotient an, durch wie viel ſpaniſche Fuße die Länge des Pariſer Fußes gemeſſen wird, oder die Zahl des Pariſer Fußes, wovon der ſpaniſche als Einheit gilt; denn

1) 1 Par. F. = 144,0 Par. Lin. und

2) 1 ſpan. F. = 125,3 = = giebt durch Vergleichung der Werthe: „in einem Pariſer Fuß iſt der ſpaniſche ebenſo oft enthalten, wie in dem Werthe deſſelben = „144,0 der Werth des letztern = 125,3; „ alſo

$$\frac{1 \text{ Par. Fuß}}{1 \text{ ſpan. Fuß}} = \frac{144{,}0}{125{,}3} = 1{,}4924 \text{ mal.}$$

Bringt man den Nenner im erſten Theile der Gleichung durch Multiplication in den andern Theil, ſo hat man:

1 Par. Fuß = 1,14924 ſpan. Fuße.

Multiplicirt man ferner auf beiden Seiten mit 377, wodurch die Gleichung nicht geändert wird, ſo ergiebt ſich:
377 Par. Fuß = 377 × 1,14924 = 433,20348 ſpan. F.

Es iſt aber $\frac{144{,}0}{125{,}3} = 1{,}14924$ der Exponent oder der Werth des Verhältniſſes, von der Einheit des Pariſer Fußmaaßes zur Einheit des ſpaniſchen Fußmaaßes; aus der Abmeſſung beider mit der Pariſer Linie entſtanden; daher es bei der Verwandlung einer beliebigen Summe oder Zahl von Fußeinheiten in die Zahl einer andern, aber gleichartigen Maaßgröße, hinreichend iſt, das Verhältniß ihrer Einheiten in irgend einem Zahlenſyſteme zu kennen, und zwar Letzteres darum, weil es den Werth eines Verhältniſſes nicht ändert, wenn man beide Glieder mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt; denn immer wird jede erdenkliche Größe entweder als ein Vielfaches oder als ein Theil von einer beſtimmt angenommenen betrachtet werden können. Der Werth für diejenige Einheit, welche der geſuchten Zahl zu Grunde liegen ſoll, wird jederzeit Diviſor für den andern Werth; alſo in unſe-

rem Beispiele, bei verlangter Verwandlung in spanische Fuße, die Anzahl Par. Lin. = $125{,}_3$, welchen zusammen seine Länge gleich kommt. Es ist auch aus diesem Grunde schon klar, daß das Verhältniß der verschiedenen Werthe zweier Einheiten hinlänglich ist zur Verwandlung einer Zahl des einen Systems in das andere, weil jede Zahl nichts anders, als die Vermehrung der Einheit so vielmal um sich selber ist, als in derselben Einheiten liegen; oder weil jede Zahl ein Faktor mit 1 ist. Hat man gefunden, daß 1 Par. F. in dem spanischen Fußmaaße gleich der Zahl $1 \times 1{,}_{14924}$ ist, so muß sie für 377 Pariserfuß-Einheiten 377 mal größer, d. h. $= 377 \times 1{,}_{14924} = 433{,}_{26348}$ seyn. Nimmt man an, die Aufgabe sey; 847 spanische Längenfuße in Pariser Längenfuße zu verwandeln, so muß in dem Quotienten für den Werth des spanischen Fußes der des Pariser Fußes Divisor werden, woraus man erhält:

$$1 \text{ span. Fuß} = \frac{125{,}_3}{144{,}_0} = 0{,}_{8701} \text{ Pariser Fuß;}$$

auf beiden Seiten der Gleichung mit 847 multiplicirt, ergiebt sich:

$$847 \text{ span. Fuß} = 847 \times 0{,}_{8701} = 736{,}_{9747} \text{ Par. Fuß.}$$

§. 210.

Eine Tabelle Nro. I. wie die in §. 202, in welcher die Zahlen berechnet sind, die entstehen, wenn man die Einheit eines Maaßes durch eine andere Maaßeinheit ausmißt, dient sonach dazu, eine beliebige Länge, wenn solche in einem bekannten Maaße gegeben ist, sogleich in ein anderes zu verwandeln, indem man nur mit der bekannten Maaßzahl den Werth ihrer zugehörigen Einheit in der gesuchten Maaßgattung multipliciren darf. Wird z. B. gefordert:

1) 436 Wienerfuß in Mètres zu verwandeln, so sucht man den Werth eines Wiener Fußes in Mètres auf, welchen man $= 0{,}_{316103}$ angezeigt findet, und multiplicirt diesen mit der gegebenen Anzahl Fuße; also

436 Wien. F. = 436 × $0{,}_{316103}$ = $137{,}_{820908}$ Mètres.

2) Man solle 322,5 Mètres in rheinländische Fuße verwandeln, so ist

322,5 Mètres = 322,5 × $3{,}_{18599}$ = $1027{,}_{482}$ rheinl. F.

§. 211.

Die Tafel II. in §. 203 enthält die verschiedenen Zusammensetzungen und Eintheilungen einiger landesüblichen Längengrundmaaße. Man wird durch sie, in Verbindung mit Taf. I., in den Stand gesetzt, jede gegebene Maaßeinheit oder deren Theile und Vielfache von einem Lande, in Werthen beliebiger Maaßeinheiten, eines andern Landes zu finden.

Beispiele.

1) Man solle 1 Wiener Längenzoll in den Zahlen eines Mètre, Décimètre und Centimètre angeben.

Aufl. Der Wienerzoll ist nach Taf. II. §. 203 der 12te Theil seines Fußes; daher seinen Werth in Mètres aus Taf. I. §. 202 entnommen ist:

$$\left.\begin{array}{l}1 \text{ Wiener Zoll} \\ \frac{1}{12} \text{ " Fuß}\end{array}\right\} = \frac{0{,}_{316103}}{12} = 0{,}_{026340} \text{ Mètres.}$$

Ein Mètre hat 10 Décimètres, daher:

1 W. Zoll = $0{,}_{026342}$ × 10 = $0{,}_{26342}$ Décimètres.

Ein Mètres hat 100 Centimètres, daher:

1 W. Zoll = $0{,}_{026342}$ × 100 = $2{,}_{6342}$ Centimètres.

Zur Auflösung der so eben gegebenen Aufgabe, so wie derer des letzten §., wenden die meisten Arithmetiker Proportionen an; welches Verfahren zwar weitläufiger ist, jedoch zu seiner Erklärung hier aufgeführt werden soll.

Bei der letzten Aufgabe, in welcher die Größe eines Wiener Zolles auf Mètres gebracht werden solle, wozu deren Anzahl gegeben ist, welche einem Wiener Fuß gleich kommt, wird nach der gewöhnlichen Art geschlossen:

„Der wievielte Theil ein Zoll von seinem Fuß ist, der

„ebenso vielte Theil muß der Werth des Zolles von dem des „Fußes in einer beliebigen Maaßgattung seyn.“

Es lassen sich aber die Proportionen viel einfacher und dem mathematischen Geiste angemessener entwickeln. Im gleichen Beispiele ist sonach:

a) 1 Wien.F. = 12 Zoll = 0,316103 Mètres

b) 1 = = x =

Die Gleichung a) durch die Gleichung b) dividirt, giebt:

$$12 : 1 = 0{,}316103 : x$$

$$12\,x = 1 \times 0{,}316103 \text{ und}$$

$$x = 1 \text{ Wien.Zoll} = \frac{0{,}316103}{12} = 0{,}02642 \text{ Mètres.}$$

Für die Verwandlung in Décimètres, ist:

c) 12 Zoll = $0{,}316103 \times 10 = 3{,}16103$ Décimètres;

d) 1 . . . . . = y Décim.

$$12 : 1 = 3{,}16103 : y$$

$$12y = 1 \times 3{,}16103$$

$$y = 1 \text{ Wien.Zoll} = \frac{3{,}16103}{12} = 0{,}2642 \text{ Décimètres.}$$

Für die Verwandlung in Centimètres:

e) 12 Zoll = $0{,}316103 \times 100 = 31{,}6103$ Centimètres;

f) 1 = ... = Z Centim.

$$12 : 1 = 31{,}6103 : Z$$

$$12\,Z = 1 \times 31{,}6103.$$

$$Z = 1 \text{ W.Zoll} = \frac{31{,}6103}{12} = 2{,}642 \text{ Centimètres.}$$

Bei aufmerksamer Betrachtung dieser Entwicklungen ergeben sich die nöthigen Regeln von selbst.

2) Eine preußische Längenruthe im Werthe von württemb. Längenruthen anzugeben.

Nach Taf. I. §. 202 ist:

A) 0,912815' preuß. Fuß = 1 württemb. Fuß.

In dieser Gleichung auf beiden Seiten mit 0,912815 .. dividirt, erhält man:

B) 1 preuß. Fuß $= \frac{1}{0,_{912815}}$ württemb. Fuß.

Aus Taf. II. §. 203 ersieht man, daß die preuß. Ruthe 12 preuß. Fuß und die württemb. Ruthe 10 württemb. Fuß enthält; daher aus B) auch wird: C) 1 prß. F. $= \frac{1}{9,_{12815}}$ württemb. Ruthen; multiplicirt man in letzterer Gleichung auf beiden Seiten mit 12, so ist:

D) 12 prß. Fuß = 1 prß. Ruthe $= \frac{12}{9,_{12815}}$ württb. Ruthen; hieraus:

1 preuß. Ruthe = $1,_{31461}$ württemb. Ruthen;

oder: 12 = Fuße = $13,_{1461}$ württemb. Fuße.

Bei Auflösung dieser Aufgabe durch Proportionen, nehme man die gesuchte Anzahl württemb. Ruthen, welche einer preuß. Ruthe gleich kommen solle = x an, und setze:

a) 1 preuß. Fuß $= \frac{1}{9,_{12815}}$ württemb. Ruthen;

b) 12 preuß. Fuß oder 1° = x.

Die Gleichung a) durch b) dividirt, giebt:

$$1 : 12 = \frac{1}{9,_{12815}} : x;$$

das erste und dritte Glied mit $0,_{12815}$ (nach §. 145) multiplicirt, wird:

$$9,_{12815} : 12 = 1 : x$$

$$9,_{12815} \times x = 12$$

$$x = \frac{12}{9,_{12815}} = 1,_{31461}$$ württemb. Ruthen; wie vorhin.

Auf dem Vorgetragenen beruht jede Verwandlung eines Maaßes in ein anderes.

§. 212.

Wenn der Inhalt einer Fläche nach irgend einem Flächenmaaße bekannt ist, und man soll denselben in einem andern Flächenmaaße bezeichnen, so kann, wie schon früher angedeutet worden, die nöthige Werthvergleichung vorgenommen werden,

wenn entweder die Werthe der Flächeneinheiten in gleichen Flächentheilen gegeben sind, oder man das Verhältniß der sie umschließenden Seiten gegen einander kennt. Z. B. es seye zu finden, wie viel Württemb. □Fuß die Fläche eines Nürnberger Quadratschuhes messen?

Diese beiden Flächeneinheiten sind Quadrate, weßhalb man nur eine Seite von jeder, in einem gemeinschaftlichen Längenmaaße zu kennen braucht, weil in diesem Falle, die Faktoren eines Flächenerzeugnisses je einander gleich sind. Nach Tafel I. des §. 202. ist die Seite des Württemb. □Fußes = 127 Par. Lin., und nach Tafel III. §. 206. die Seite des Nürnberger Quadratfußes = 134,67; aus diesen Werthen erhält man:

a) 1 W. □Fuß = $127 \times 127 = 127^2$ Par. Lin.

b) 1 Nürnb. □Fuß = $134{,}67 \times 134{,}67 = 134{,}67^2$ Par. Lin.

Dividirt man b) durch a), so ergiebt sich:

$$\frac{1 \text{ Nürnb. □Fuß}}{1 \text{ Württb. □Fuß}} = \frac{134{,}67^2}{127^2} \text{ und}$$

$$1 \text{ Nürnb. □Fuß} = \frac{134{,}67^2}{127^2} \text{ Württemb. □Fuß.}$$

endlich:

$$\text{c) } 1 \text{ Nürnb. □F.} = \frac{18136{,}013}{16129{,}0} = 1{,}124435 \text{ W. □Fuß.}$$

2tes Beispiel. Wird gefordert, die Flächen-Größe des Nürnberger Morgen, welcher $256 \times 200 = 51200$ Nürnb. □Fuß mißt, in die Zahl Württemb. □Fuße, welche auf die nämliche Fläche gehen, zu verwandeln, so darf man nur die beiden Theile der Gleichung c) mit der Zahl 51,200 multipliciren: 1×51200 Nürnb. □F. $= 1{,}124435 \times 51200$ W. □Fuß woraus entsteht:

$$\text{d) } \left\{ \begin{matrix} 51200 \text{ Nürnb. □F. oder} \\ 1 \text{ — Morgen} \end{matrix} \right\} = 57571{,}072 \text{ W. □F.;}$$

oder in Württemb. Morgen reduzirt, wovon 1 Morgen = 10 × 10 × 384 = 38400 Württ. □Fuß hat, s. i.

e) 1 Nürnb. M. $= \frac{57571{,}072}{38400{,}0} = 1{,}499247$ W. Morg.

Den Dezimalbruch in 4tels, 8tels, 16tels Morgen und Ruthen aufgelößt, wird:

$\frac{384}{16}$ □Ruthen $= 24$

0,499247
4
1,996988 Viertel
2
1,993976 Achtel
2
1,987952 Sechszehntel
24
3951808
1975904
23,710848 □Ruthen

$\left\{\frac{1}{16}\right.$ Morgen $= 24$ □Ruthen $\left.\right\}$

demnach 1 Nürnberg. Morgen im Württemb. Meß = 1 Morgen, 1 Viertel, 1 Achtel, $\frac{1}{16}$. und 23,711 □Ruthen.

Diese etwas zusammengesetzte Rechnung zu vereinfachen, sind in der Taf. III. des §. 206. die Werthe verschiedener Flächeneinheiten auf gleiche Maaße, den Quadratmètre und den alt Pariser □Fuß reduzirt, wodurch man im Stande ist, eine geforderte Verwandlung auf kürzerem Wege zu erhalten. Das vorgegebene Beispiel wird mit Hülfe der Tafel auf nachstehende Art behandelt:

a) 1 Nürnb. Morgen = 4725,243 □Mètres,

b) 1 Württb. — = 3151,745 □ —

$\frac{1 \text{ Nürnb. Morgen}}{1 \text{ Württemb. M.}} = \frac{4725{,}243}{3151{,}745}$; hieraus:

1 Nürnb. Morgen $= \frac{4725{,}243}{3151{,}745}$ Württb. Morgen.

1 Nürnb. M. = 1,499244 Württ. M., was vom vorigen Resultate so viel wie Nichts abweicht.

Mittelst der Proportion würde man, wenn die Württb. Morgenzahl = x angenommen ist, verfahren:

1 Württemb. M. = 3151,745 □Mètres
x Württemb. M. = 4725,243 □ — (= 1 Nürnb. M.)

x : 1 = 4725,243 : 3151,745.

$3151{,}745 = 1 \times 4725{,}243$; woraus

$$x = \frac{4725{,}243}{3151{,}745} = 1{,}499246$$ Württ. Morgen

wird.

3tes Beispiel. Die Wiener Quadr.-Klafter in einer Flächenzahl anzugeben, deren Einheit ein engl. Yard ist.

Aufl. Nach der Tafel III. §. 206. ist:

1 Wiener □Kl. = 3,59715 □Mètres, und
1 □Yard = 0,836104 □M.; so nach

$$\frac{1 \text{ □Klafter}}{1 \text{ □Yard}} = \frac{3{,}59715}{0{,}836104};$$ hieraus

$$1 \text{ □Klafter} = \frac{3{,}59715}{0{,}836104} = 4{,}3023 \text{ Yards.}$$

oder durch Proportion:

a) 1 □Yard = 0,836104 □Mètres
1 □Kl. = b) x □Yards = 3,59715 □ —

$\frac{b}{a}$) x : 1 = 3,59715 : 0,836104.

$0{,}836104 \times x = 1 \times 3{,}59715$

$$x = \frac{3{,}59715}{0{,}836104} = 4{,}3023 \text{ Yards.}$$

Mit diesen Beispielen möchte jede mögliche Verwandlung eines Flächenmaaßes in ein anderes erklärt seyn.

§. 213.

Ueber die Verwandlung der Raummaaße und den Gebrauch der Tafel IV. §. 208. zu diesem Zwecke, noch viel zu sagen, wäre schwierig, da die entsprechende Erklärung der Beschaffenheit solcher Maaße in den frühern §§., und die Entwicklungs-

art, so wie die Vergleichung ihrer Werthe, in den vorigen Beispielen, enthalten ist. Einige Aufgaben mögen der Uebung halber hier noch Platz finden.

1. Aufgabe. Wie viele Cubik-Mètres gehen in den Raum von 8 bairischen Scheffeln?

Aufl. In Tafel IV. §. 208. ist enthalten:

1 bairischer Scheffel = 0,2223575 Stères; mit 8 auf beiden Seiten der Gleichung multiplicirt:

8 bairische Scheffel = 8 × 0,2223575

" " " = 1,77886 Stères.

Durch Proportion:

a) 1 bairischer Scheff. = 0,2223575 Stères

b) 8 " " = x St.

$\frac{a}{b}$) $1 : 8 = 0{,}2223575 : x$

$1 \times x = 8 \times 0{,}2223575$

$x = 1{,}77886$ Stères.

2. Aufgabe. Wie viel französische Litres geben einen Württemb. Aymer?

Aufl. a) 1 Litre = 0,001 Stère

b) 1 W. Aym. = 0,293927 Steres.

$\frac{b}{a}$) $= \frac{1 \text{ W. Aym.}}{1 \text{ Litre}} = \frac{0{,}293927}{0{,}001}$; hieraus:

1 Württemb. Aym. $= \frac{0{,}293927}{0{,}001} = 293{,}927$ Litres

Durch Proportion:

c) 1 Litre = 0,001 Stère

d) x Litres = 0,293927 " = 1 Württ. Aymer.

$\frac{d}{c}$) $x : 1 = 0{,}293927 : 0{,}001.$

$0{,}001 \times x = 1 \times 0{,}293927$

$$x = \frac{0{,}293927}{0{,}001} = 293{,}927 \text{ Litres.}$$

3te Aufgabe. Wie viel braucht man A) Bairische und B) Badische Flüssigkeits-Maaße zu einer dergleichen Württemberg. Maas?

Auflösung. Aus Taf. IV. §. 208. ersieht man, daß:

A) 1 Württemb. M. = 0,00183705 Stères
1 Bairische M. = 0,00106903 "

Daher mit der untern Gleichung in die obere dividirt:

$$\frac{1 \text{ Württemb. M.}}{1 \text{ Bairische M.}} = \frac{183705}{106903};$$ hieraus

$$1 \text{ Württb. M.} = \frac{183705}{106903} \text{ Bair'sche Maas und}$$

1 Württb. M. = 1,71847 " "

Durch Proportion:

a) 1 Bair. M. = 0,00106903
b) x Bair. " = 0,00183705

$$\frac{b}{a}) \quad x : 1 = 183705 : 106903$$

$$106903 \times x = 1 \times 183705$$

$$x = \frac{183705}{106903} = 1{,}718427 \text{ Bairische Maas.}$$

B) 1 Württemb. Maas = 0,00183705 Stères
1 Badische Maas = 0,0015 "

$$\frac{1 \text{ Württemb. M.}}{1 \text{ Badische M.}} = \frac{183705}{150000};$$ hieraus:

$$1 \text{ Württemb. M.} = \frac{183705}{150000} = 1{,}2247 \text{ Badische Maas.}$$

Durch Proportion:

a) 1 Badische Maas = 0,0015
b) x " " = 0,00183705

$$\frac{b}{a}) \quad x : 1 = 183705 : 150000$$

$$150000\,x = 1 \times 183705$$

$$x = \frac{183705}{150000} = 1{,}2247 \text{ Badische Maas.}$$

§. 214.

Viele Gegenstände des Verkehrs haben eine solche Beschaffenheit, daß der Raum, den sie einnehmen, nur auf eine sehr schwierige Art durch Abmessung genau bestimmt werden könnte; weil entweder ihr Umfang sehr unregelmäßig ist, oder ihre eigenthümliche Materie nicht die Eigenschaft besitzt, sich in eine bestimmte Form schmiegen zu lassen; auch das Verhältniß der leeren Zwischenräume in gleichen Stoffen, nie ganz dasselbe bleibt. Diesen Uebelständen auszuweichen, nimmt man das Naturgesetz zu Hülfe, welches zeigt, daß die Schwere, oder das Gewicht mehrerer gleicher Körpertheile zu dem Gewichte eines Theiles, im geraden Verhältniß ihrer Zahlen steht. Man hat daher schon frühe ein bestimmtes Gewicht zu den Vergleichungen der Körpermassen festgesetzt, und dasselbe in irgend einer Materie, gewöhnlich aber in Metalle versinnlicht, da solche bei gleicher Schwere mit andern Stoffen, die geringsten Ausdehnungen haben. Lange Zeit wurden die Normalgewichte durch die Balancirung fortgepflanzt und unter sich verglichen; denn es entstanden eben so viele verschiedene Gewichtseinheiten, als sich die Verbindungen des Verkehrs mehrten, bis die französische Akademie der Wissenschaften, ein natürliches Gewicht, welches im Verhältniß zum Erdball steht, aufstellte. Wie der Mètre, der 40 Millionteste Theil des Erdmeridians, die Einheit des Längenmaaßes ist, so soll ein Kilogramme, das Gewicht einer Masse destillirten, oder Regen-Wassers, welche den Raum eines hohlen Würfels von 1 Décimètre ausfüllt, die Einheit, für die Werthe der Gewichte seyn. Da aber eine gleiche Wassermenge, verschiedene Ausdehnungen, welche auf das Gewicht den nämlichen Einfluß haben, annehmen kann,

je nach dem Grade der Temperatur und der Dichtigkeit der Luft, in denen es sich befindet, so hat man bei Bestimmung der Schwere eines Kilogramme Wassers, solches auf seinen Normalzustand gebracht, und im luftleeren Raume, bei 4 Grad Temperatur über dem Schmelzpunkte des Eises nach dem 100 theiligen Thermometer, bei welchen Umständen es seine größte Dichtigkeit hat, beobachtet.

Kennt man nun das Verhältniß irgend eines Gewichtes zu dem Gewichte des Kilogramme, so ist es leicht, dasselbe in einem festen Körper darzustellen; auch dienen derlei Verhältnisse, ebenso wie die bisher abgehandelten, dazu, die verschiedenen Gewichte wieder unter sich vergleichen, und den Werth des einen, auf den Werth des andern bringen zu können, da man sie in solchem Falle in Zahlen der gleichen Einheit kennt.

Ist aber das Verhältniß eines verkörperten Gewichtes zu dem Kilogramme nicht bekannt, so darf man nur untersuchen, welche Masse destillirten Wassers in dem angegebenen Zustande, demselben das Gleichgewicht hält; wo sodann aus dem Gesetze, daß sich die Gewichte desselben Stoffes, wie ihre Räume verhalten, sich das unbekannte Verhältniß leicht finden läßt.

In allen Ländern, auch früher in Frankreich, ist die Gewichtseinheit unter dem Begriffe eines Pfundes bekannt, und hat beinahe ein jedes ein geometrisches Verhältniß zum andern.

Aus der Vervielfältigung und Theilung dieser Einheit werden wieder andere Gewichtseinheiten, nach verschiedenen Gesetzen bestimmt.

Statt weiterer Rede über diesen Gegenstand, wollen wir nun die interessantesten Gewichtseinheiten, mit ihren Werthen in Kilogrammes hier tabellarisch zusammenstellen, weil Solches das Geeignetste seyn mag, ihren Gebrauch für praktische Beispiele, vorzubereiten.

V. Tafel. (Der Gewichte.)

a) Französisches neues Gewicht.

1 Millier (Seetonne)	=			1000	Kilogrammes
1 Quintal (Zentner)	=			100	"
1 Kilogramme (Pfund)	=	1000	Grammes =	1	"
1 Hectogramme	=	100	" =	0,1	"
1 Décagramme	=	10	" =	0,01	"
1 Gramme	=	1	" =	0,001	"
1 Decigramme	=	0,1	" =	0,0001	"

Altes Gewicht.

1 Grain	= 0,053 Grammes	= 0,000053	Kilogrammes
1 Gros	= 72 Grains = 3,82 Grammes	= 0,00382	Kilogr.
1 Once	= 8 Gros = 30,59 "	= 0,03059	"
1 Livre	= 16 Onces = 489,51 "	= 0,48951	"

b) Englisches Gewicht.

Troy (Münzgewicht.)

1 Grain	= 0,06477 franz. Grammes =	0,00006477 Kilogr.
1 Pennyweight	= 24 Grain =	0,00155456 "
1 Once	= 20 Pennyweight =	0,03109 1/3 "
1 Livre troy impériale (Pfund)	= 12 Onces =	0,3730956 "

Avoir du pois (Handelsgewicht).

1 Dram	= 1,7712 Grammes =	0,001771 2 Kilogr.
1 Once	= 16 Drams =	0,0283384 "
1 Livre avoir du pois impériale	= 16 Onces =	0,4534148 "
1 Quintal (Zentner)	= 112 Livres =	50,78246 "
1 Tonne	= 20 Quintaux =	1015,649 "

Goldgewicht beim Probiren:	Silbergewicht beim Probiren:
1 Troy ℔ = 24 Karat	1 Troy ℔ = 12 Unzen
1 Karat = 4 Grains	1 Unze = 20 Deniers
1 Grain = 4 Quarts	1/20. Unze = 1 Pfennigtheil
Standard Gold = 22 Karat fein.	Standard-Silber = 11,1 Unzen fein.

(Tafel der Gewichte.)

Juwelengewicht.	Apothekergewicht.
1 Troy ℔ = 12 Unzen	1 Troy ℔ = 12 Unzen
1 Unze = 151½ Karat	1 Unze = 38 Drachmen
1 Karat = 3⅙ Grains troy	1 Drachme = 3 Skrupel = 60 Grains troy.

c) Holland:

1 ℔ Handelsgew. = 494,09 Grammes = 0,49409 Kilogr.
1 Mark = ½ ℔ = 247,04 = 0,24704 =
1 Loth = 1/32 ℔ = 15,44 = 0,01544 =
1 Drachme oder 1 Quent = ¼ Lth = 0,00386 =
1 Schiffs-℔ = 3 Ctr. = 300 ℔ = 148,227 =
1 ℔ Münz- oder Troy-Gewicht = 2 Mark = 16 Unzen = 32 Loth = 128 Drachmen oder Quent'chen = 10240 holl. Aß = 492,2322 Grammes = 0,4922322 Kilogr.
1 Aß = 0,04806955078 Grammes = 0,00000480695... Kilogr.

d) Köln:

1 Centner = 106 ℔ = 49,567985 Kilogr.
1 ℔ = 467,6225556 Grammes = 0,4676225556 =
1 Mark = ½ ℔ = 8 Unz. = 16 Loth
= 64 Quent = 256 Pfenn.
= 912 Heller = 4020 Aß
= 4352 Eß'chen und
= 65536 Richtpfennige
= 0,2338112778 Kilogr.
1 Richtpfennig = 0,0035676769693 Grammes.

e) Oesterreich:

1 ℔ Handelsgewicht = 560,06 Grammes = 0,56006 Kilogr.
1 ℔ Gold- u. Silbergew. = 280,734 Gr. = 0,280734 Kilogr.
1 Saum = 275 ℔ Handelsgewicht.
1 Lägel = 125 ℔ = =
1 Centner = 100 ℔ = =
1 Stein = 20 ℔ = =

(Tafel der Gewichte.)

f) Preußen:

1 ℔ Handelsgew. = 32 Loth à 4 Qt. = 0,4676225556 Kilogr.
1 Ctr. = = 110 ℔ Handelsgew.
1 Schiffspfund = 3 Ctr. = 330 ℔ Handelsgew.
1 Schiffslast gesetzlich = 4000 ℔; sonst = 36 Ctr.
1 Stein = 22 ℔ = $\frac{1}{5}$ Ctr.
1 Mark Gold-, Silber- und Münzgewicht ist = $\frac{1}{2}$ ℔; solche ist der kölnischen Mark gleich und wird in Berlin auch nur in 288 Grän getheilt.

g) Baiern:

1 ℔ = 32 Loth = 60 Grammes = 0,560 Kilogrammes
1 Ctr. = 100 ℔ = 56,0 =

h) Württemberg:

1 ℔ = 1 kölnisches ℔
1 Ctr. leicht = 100 ℔; 1 Ctr. schwer = 104 ℔ = 48,63274578 Kil.

i) Sachsen:

1 ℔ Leipz. Handelsgew. = 467,167 Gr. = 0,467167 Kilogr.
1 Ctr. = 5 Stein = 110 ℔ = 51,38837 Kilogrammes.
1 ℔ Dresdner = 466,89 Grammes = 0,46689 "
1 Mark Gold- und Silbergewicht = 1 kölnische Mark; sie wird in 4422 Dukaten-Aß eingetheilt.

k) Baden:

1 ℔ = 500,0 Grammes = 0,50 Kilogrammes.
1 Ctr. = 10 Stein = 100 ℔ = 50,0 =
1 Mark Gold- und Silbergewicht = 1 kölnische Mark.

l) Rußland:

1 ℔ = 32 Loth = 96 Solotnik = 409,168 Gr. = 0,409168 Kilogr.
1 Pud = 40 ℔ . . . . . = 16,30672 =
1 Bercowitz = 400 ℔ = 163,6672 =
1 Solotnik wird für Gold- und Silbergewicht in 96 Theile getheilt.

(Tafel der Gewichte.)

m) Polen:

1 ℔ = 16 Unzen = 32 Loth = 128 Drachmen = 384 Skrupel = 9216 Gran = 50688 Granikow = 0,405504 Kilogr.
1 Ctr. = 4 Stein = 100 ℔ = 40,5504 "
1 Mark Gold- und Silbergewicht = 1 kölnische Mark.

n) Hessen-Darmstadt:

1 ℔ = 32 Lth à 4 Qt. à 4 Richtpfennig = 500,0 Gr. = 0,5 Kilogr.
1 Ctr. = 100 ℔ = 50000,0 Grammes = 50,0 Kilogrammes.

o) Hessen-Kassel:

1 ℔ schwer Handelsgewicht = 0,48424 Kilogrammes.
1 Ctr. = 108 ℔ = 52,21792 "
1 ℔ leicht = 1 ℔ kölnisch.
1 Ctr. leicht = 108 ℔ leicht = 50,503236 "
1 Mark Gold- und Silbergew. = 1 Mark kölnisch.

p) Basel:

1 ℔ schwer Handelsgewicht = 0,49319 Kilogr.
1 ℔ leicht " " = 0,48615 "
1 ℔ Silbergewicht = 0,46766 "
1 Krone Gold = 3,3707 Gr. = 0,0033707 "

q) St. Gallen:

1 ℔ Handelsgew. = 32 Loth = 16 Unzen = 0,465003 Kilogr.
1 ℔ schweres Gewicht = 40 Loth = 0,577548 "
1 Ctr. = 100 ℔.

r) Genf:

1 ℔ kleines Gewicht = 0,45904 Kilogrammes
1 ℔ großes Gew. = 1½ ℔ kleines = 0,68856 "
1 Ctr. = 100 ℔.

s) Nürnberg:

1 Apotheker ℔ = 12 Unzen = 0,357854 Kilogr. (solches ist in ganz Deutschland üblich).

§. 216.

Den Gebrauch der Gewichtstafel sollen einige Beispiele erklären:

1te Aufgabe. Ein württemb. oder kölnisches Loth in der Zahl eines holländischen Aß anzugeben.

Auflösung. Da 1 ℔ = 32 Loth hat, so ist:

a) 1 Loth oder $\frac{1}{32}$ ℔ } $= \frac{0,4676225556}{32}$ Kilogr.

b) 1 holländ. Aß $= 0,0000480695$ „

daher:

$$\frac{a}{b}\Big) \frac{1 \text{ württb. Loth}}{1 \text{ holländ. Aß}} = \frac{0,4676225556}{32} : 0,0000480695$$

$$1 \text{ württb. Loth} = \frac{0,4676225556}{32 \times 0,0000480695} \text{ holl. Aß}$$

$$1 \text{ württb. Loth} = \frac{4676225556}{15382240} = 304,0016 \text{ holl. Aß.}$$

Durch Proportion:

a) 1 holländ. Aß $= 0,0000480695$

b) x „ „ $= \frac{0,4676225556}{32}$

$$\frac{b}{a}\Big) \; x : 1 = 0,0000480695 : 0,0146007986$$

$$x \times 0,0146007986 = 1 \times 0,0000480695$$

$$x = \frac{146007986}{480695} = 304,0016 \text{ holl. Aß.}$$

Da man weiß, daß 1 köln. Mark oder 16 Loth württb. Gewicht = 65536 köln. Richtpfennigen, so läßt sich jetzt berechnen, wie viel solcher Richtpfennige auf 1 holl. Aß gehen; denn es ist:

1 Loth $= \frac{65536}{16}$ Richtpfennige;

1 Loth $= 304,0016$ holl. Aß;

daher:

$\frac{65536}{16}$ Richtpf. $= 304,0016$ holl. Aß, und hieraus

$\frac{40960000}{3040016}$ Richtpf. = 1 holl. Aß;

13,47363 Richtpf. = 1 holl. Aß.

Durch Proportion:

65536 Richtpf. = 16 × 304,0016 holl. Aß;

x " = 1 " "

$x : 65536 = 1 : 16 \times 304{,}0016$

$$x = \frac{65536}{16 \times 304{,}0016} = \frac{4096}{304{,}0016}$$

1 holländ. Aß $= x = \frac{40960000}{3040016} = 13{,}47363$ Richtpf.

2te Aufgabe. In dem deutschen Zollvereinsgebiet ist $\frac{1}{2}$ Kilogramme als Zollpfund, und der Zoll-Centner zu 100 solcher Pfunde angenommen worden; es soll nun dargethan werden: a) wie der württb. schwere Centner in Zollpfunde verwandelt wird, und b) wie der Werth eines Zoll-Lothes, wovon auch 32 auf ein Zollpfund gehen sollen, sich zum württemb. Lothe verhält.

Auflösung für a):

1 württb. schwerer Ctr. = 104 ℔ = 48,63274578 Kilogr.

Zollgewicht 1 ℔ = 0,5 = $\frac{1}{2}$ "

$$\frac{104 \text{ ℔ württb.}}{1 \text{ ℔ Zoll}} = \frac{48{,}63274578}{1/2};$$

104 ℔ württb. = 48,63274578 × 2 Zoll-℔ "

1 Ctr. schwer = 97,26549156 ℔ Zollgewicht;

und hieraus:

$$1 \text{ ℔ württb.} = \frac{97{,}26549156}{104.0} = \frac{9726549156}{10400000000}$$

1 ℔ württb. = 0,935245111 Zoll ℔.

Durch Proportion:

1 Zoll ℔ = 0,5 Kilogrammes.

x " " = 48,63274578 Kilogr.

$x : 1 = 48{,}63274578 : 0{,}5$

$$x = \frac{4863274578}{50000000} = 97{,}26549156 \text{ Zoll ℔}.$$

Auflösung für b)

1 Zoll Loth = $\frac{0,5}{3\mathcal{Z}}$ Kilogrammes

1 württb. Lth = $\frac{0,4676225556}{3\mathcal{Z}}$ Kilogr.

---

1 Zoll-Loth : 1 württb. L. = 0,5 : 0,4676225556

= 1 : 0,935245111

1 württb. Loth =

. . . . . 0,935245111 Zoll-Loth . . . . . .

Aus Vorstehendem ergeben sich folgende Regeln für die Verwandlungen der württb. Gewichte in Zollgewicht und umgekehrt, von denen man das Verfahren leicht zu allen möglichen Fällen ableiten kann:

1) Jede gegebene Zahl von württb. Pfunden muß mit 0,935245111 multiplicirt werden, um ihren Werth in Zollpfunden zu erhalten.

2) Multiplicirt man eine beliebige Anzahl Zollpfunde mit $\frac{5000000000}{4676225556}$ = 1,06924, dem Werthe eines Zoll Pf. in württb. Pf., so erhält man die Zahl württb. Pfunde, welcher erstere gleich ist.

3) Wenn man eine beliebige Anzahl württb. Lothe mit 0,935245111 multiplicirt, so giebt das Produkt: Zolllothe.

4) Multiplicirt man irgend eine Anzahl Zolllothe mit 1,06924, so ist der Werth derselben in württemb. Lothen gefunden.

Man nennt derlei Zahlen die beständigen Faktoren der Verwandlungen.

Die Verwandlung von Quent'chen, Centner, u. s. w. einer Gewichtsgattung in die andere beruht auf den gleichen Grundsätzen; so wie die Vergleichung der Gewichte von andern Verhältnissen.

§. 217.

Es soll nun gezeigt werden, wie man aus dem Gewichte in der Luft einer Körpermasse, was auch das physische Gewicht heißt, und dem bekannten specifischen Gewichte derselben, den Rauminhalt berechnen kann, welchen die Oberfläche des Körpers begränzt.

Ebenso wird die Berechnung des physischen Gewichtes aus einem gegebenen Rauminhalt, und dem specifischen Gewichte des ihn ausfüllenden Stoffes dargestellt werden.

Die am Ende dieser Abhandlung aufgeführte Tabelle enthält die Verhältnisse der specifischen Gewichte nach den genauesten Beobachtungen, und sind solche den folgenden Beispielen, wenn nicht besondere Bestimmungen angegeben werden, zu Grunde gelegt. Wie sich die specifischen Gewichte zu ihren Räumen verhalten, ist §. 201. Nro. 3 vorgekommen.

1tes Beispiel. Den Raumgehalt einer Kalksteinmasse von 700 württb. Pfunden, oder einer Roßlast, in württembergischen Kubikfußen zu finden. Man verstehe den blauen dichten Kalkstein aus dem Bruche bei Vaihingen auf den Fildern, dessen specifisches Gewicht, nach Alberti, sich zu dem des Wassers = 1 : 2,694 verhält.

Auflösung. Setzt man voraus, daß der zu suchende Raum vollständig von der gegebenen Materie ausgefüllt seye und keine leeren Klüfte enthalte, so ist das Verfahren:

a) man mache die württemb. Pfunde nach dem vorigen §. zu Kilogrammes, so ist:

$$700 \times 0{,}4676225556 = 327{,}35578892 \text{ Kilogrammes.}$$

Nun wiegt 1 Stères Kalkstein = $2{,}694 \times 1000 = 2694$ Kilogrammes *); auf beiden Seiten der Gleichung mit 2694 dividirt, giebt:

$$\frac{1}{2694} \text{ Stère Kalkst.} = 1 \text{ Kilogramme;}$$

mit 327,335.... auf beiden Seiten multiplicirt, erhält man:

*) 1 Stères = 1000 Cub.Décimètres = 1000 Kilogrammes (Wasser).

$\frac{1}{2694} \times 327{,}335 \ldots$ Stères $= 327{,}33578892$ Kilogr.;

$\frac{32733578892}{269400000000}$ Stères Kalkst. $= 327{,}335 \ldots$ Kilogr.

$0{,}1215055$ Stères $= 327{,}33578892$ Kilogrammes.

Weil $327{,}335 \ldots$ Kilogrammes das Gewicht der in Rede stehenden Steinmasse ist, so muß also $0{,}12150 \ldots$ Stères der Raumgehalt von 700 ℔ Kalkstein seyn. Da man aber verlangt hat, das Körpermaaß in württb. Kubikfußen anzugeben, so darf man nur die Stères in solche verwandeln; nach diesem ist nach Taf. IV. des §. 208:

1 Cub.Fuß württb. $= 0{,}0235142$ Stères

x " " " $= 0{,}1215055$ "

$x : 1 = 0{,}1215055 : 0{,}0235142.$

$x = \frac{1215055}{235142} = 5{,}1673$ Cub. württb. Fuß.

b) Durch Proportion ist die Auflösung eleganter. Es ist nach Taf. V. 215:

1 württb. ℔ $= 0{,}4676225556$ Kilogr.

700 " $=$ x

α) $1 : 700 = 0{,}4676225556 : x.$

Wären die 700 ℔ das Gewicht einer Wassermasse, so hätte man in x die Anzahl von kubischen Décimètres gefunden, welche dieselbe dem Raume nach einnimmt. Nun verhalten sich aber bei gleichem physischen Gewichte verschiedener Stoffe die specifischen Gewichte, wie umgekehrt die Räume; deßhalb ist, wenn man x als den Raum des Wassers und y als den Raum von Kalkstein, beide zu dem physischen Gewichte von x Kilogrammes annimmt.

β) $2{,}694 : 1 = x : y$ kub. Décimètres.

Verwandelt man hierauf die Anzahl y kub. Décimètres in württemb. Kubikfuß, und nennt deren Zahl einstweilen z, so erhält man:

1 württemb. Cub.Fuß = 23,5142 kub. Décim.
z " " = y " "

$$1 : z = 23{,}5142 : y$$

Das erste und dritte, das zweite und vierte Glied, so wie die mittlern Glieder nochmals verwechselt nach §. 139. — giebt:

$$\gamma)\ 23{,}5142 : 1 = y : z$$

Setzt man die drei Proportionen α, β, γ untereinander, und bildet aus den Produkten ihrer gleichnamigen Glieder eine vierte Proportion nach §. 148, so ist:

$$\alpha)\ 1 : 700 = 0{,}4676225556 : x;$$
$$\beta)\ 2{,}694 : 1 = x : y;$$
$$\gamma)\ 23{,}5142 : 1 = y : z;$$

$$\delta)\ 2{,}694 \times 23{,}5142 : 700 = 0{,}467\ldots \times xy : xyz.$$

Dividirt man das zweite Verhältniß mit xy nach §. 147, so bleibt:

$2{,}694 \times 23{,}5142 : 700 = 0{,}4676225556 : z$; hieraus $z = 700 \times \frac{0{,}4676225556}{2{,}694 \times 23{,}5142}$; ferner:

$z = 700 \times \frac{1}{2{,}694} \times \frac{0{,}4676225556}{23{,}5142}$. Es ist aber:

$\frac{1}{2{,}694} = \frac{1000}{2694} = 0{,}3712$; und

$\frac{4676225556}{235142000000} = 0{,}0198869$; daher

$z = 700 \times 0{,}3712 \times 0{,}0198869 = 5{,}1674$ w. Cub.Fuß.

Will man auch erfahren, wie viel besagte Steinmasse als württb. Straßenbeschläg Raum ausfüllen wird, so ist dieß leicht zu erheben, weil man weiß, daß sich der Raum einer compakten Masse derartigen Steines zu dem Raume seiner Trümmer = 5 : 7 verhält; demnach:

$$5 : 7 = 5{,}167 : x;$$

$x = \frac{7 \times 5{,}167}{5} = 7{,}234$ würrtb. Cub.Fuß.

Aus obiger Entwicklung der zusammengesetzten Propor-

tion, welche gemeiniglich die Kettenrechnung genannt wird, lassen sich für den Fall, daß das Luftgewicht eines Körpers in württemb. Pfunden gegeben und gefordert ist, desselben Rauminhalt in württb. Cub.Fußen zu finden, folgende Regeln ableiten:

A) Die gegebene Anzahl Pfunde muß mit zwei Faktoren multiplicirt werden;

B) der erste Faktor ist der Exponent des Verhältnisses, von dem specifischen Gewichte des Wassers zu dem der Materie, aus welcher der Körper besteht;

C) der zweite Faktor ist der Quotient aus der Division des Werthes eines württemb. Pfundes in Kilogrammes durch den Werth eines württemberg. Kubikfußes in $\frac{1}{1000}$ Stères.

Diese Regeln lassen sich, mit der gehörigen Modification, auf alle möglichen Fälle der Art anwenden.

2tes Beispiel. Das Luftgewicht von einem württemb. Decimal-Cubik-Zoll gehämmerter Platina in württemb. Pfunden, Lothen u. s. w. zu finden.

1. Auflösung. Laut nachstehender Tafel über die specifischen Gewichte, ist das Gewicht von 1 Stère Platina, 20,3366 mal größer, als das von 1 Stère Wasser: nun wiegt aber $\frac{1}{1000}$ Stère Wasser = 1 Kilogramme; daher

$\frac{1}{1000}$ = Platina = 20,3366 Kilogrammes.

Weiß man, wie viel 1 württb. Kubikzoll $\frac{1}{1000}$ Stères ausmacht, so darf man nur mit der entsprechenden Zahl die letzte Gleichung multipliciren; man findet:

1 Cub.Fuß württb. = 23,5142 Millistères;

1 = Zoll = $\frac{1}{1000}$ Cubik-Fuß } = 0,0235142 =

daher:

0,0235142 Millistère Platin = 20,3366 × 0,0235142 Kilogr.

1 württb. Cub.Zoll Platin = 0,47819887972 Kilogr.

Da nun 1 württemb. ℔ = 0,4676225556 Kilogr., so ist

$$\frac{1 \text{ württb. Cub.Zoll Pl.}}{1 \text{ württb. ℔}} = \frac{0{,}47819887972}{0{,}4676225556}$$ und hieraus

1 württb. Cub.Zoll Pl. = 1,0225745 württemb. ℔.

Macht man die Dezimaltheile nach und nach zu Loth, Quent u. s. w., wie folgt:

0,0225745
32
451490
677235
0,7223840 Loth
4
2,8895360 Quent
4
3,5581440 Pfennig, so wiegt

1 württb. Cubik-Zoll Platina =
1 ℔, 2 Qt. und 3,558144 Pfennig.

2. Auflösung durch Proportion:

Zunächst verwandle man 1 württb. Cubikzoll in Millistères, durch:

1000 württemb. Cubikzoll = 23,5142 Millistères;
1 " " = x

a) 1000 : 1 = 23,5142 : x.

Wenn der gegebene württemb. Cubikzoll = x Millistères dem Raume nach aus Wasser bestünde, so wäre sein Gewicht = x Kilogrammes. Nun ist er aber von Platina, dessen specifisches Gewicht sich zu dem des Wassers = 20,336 : 1 verhält; daher, wenn man das Gewicht von 1 Cubikzoll Platina = y Kilogrammes nennt, man erhält:

1 Millistère Platina = 20,336 Kilogr.
x Millistères " = y "

1 : x = 20,336 : y

Das zweite und vierte Glied verwechſelt, nach §. 139.

b) 1 : 20,3366 = x : y Kilogrammes Waſſer.

Man verwandle y Kilogr. in württemb. Pfunde, deren Anzahl man z heiße, durch:

1 württemb. ℔ = 0,4676225556 Kilogr.

z » » = y

---

1 : z = 0,4676225556 : y;

je beide Glieder der Verhältniſſe verwechſelt nach §. 139.

z : 1 = y : 0,4676225556.

Das erſte und vierte Glied verwechſelt:

c) 0,4676225556 : 1 = y : z.

Hierauf ſetze man wieder die Proportionen a), b), c) untereinander und bilde aus den Produkten der gleichnamigen Glieder eine vierte Proportion, ſo iſt:

a) . . . . . 1000 : 1 = 23,5142 : x;

b) . . . . . 1 : 20,3366 = x : y;

c) 0,4676225556 : 1 = y : z;

467,6225556 : 20,3366 = 23,5142 × x × y : x × y × z;

d) 467,6225556 : 20,3366 = 23,5142 : z; hieraus

$$z = \frac{20{,}3366 \times 23{,}5142}{467{,}6225556} = \left(\frac{47819887972}{46762255560}\right);$$

z = 1,0225745 württb. Pfunde; woraus nach der vorigen Entwicklung ebenfalls wird:

1 württb. Cubikzoll gehämmerter Platina hat = 1 ℔, 2 Quent und 3,558144 Pfennig württb. Gewicht.

Derartige Verwandlungen von Werthen laſſen ſich gleichfalls auf allgemeine Regeln bringen.

Die gegebenen Beiſpiele werden hinreichen, aus den bekannten Verhältniſſen verſchiedener Werthe gleicher Gattung ſolche auf ein Zahlenſyſtem zu bringen, welches eine beliebige Einheit hat. Zur Ergänzung der im Verkehr und den Wiſſenſchaften am häufigſten vorkommenden Maaßeinheiten wird dieſe Abhandlung mit Darſtellung intereſſanter Vergleichungen geſchloſſen.

VI. Tafel der specifischen Gewichte verschiedener fester Körper, wobei angenommen ist, daß das Gewicht einer gleich großen Wassermasse = 1 beträgt.

Die Beobachtungen sind unter 18° des 100theiligen Thermometers vorgenommen.

Platina	gestreckte (Blech)	22,0690
	gesponnene (Drath)	21,0417
	gehämmerte	20,3366
	gereinigte	19,5000
Gold	geschmiedet	19,3617
	geschmolzen	19,2587
Tungsteinmetall (Wolfram)		17,6000
Quecksilber bei 0°		13,598
Blei, geschmolzen		11,3523
Palladium		11,3
Rhodium		11,0
Silber, geschmolzen		10,4743
Wismuth, geschmolzen		9,822
Kupferdrath		8,8785
Kupfer, rothes, geschmolzen		8,7889
Molybdämmetall		8,611
Arsenikmetall		8,308
Nikelmetall, geschmolzen		8,279
Uranmetall		8,109
Stahl, ungehärtet		7,8163
Kobalt, geschmolzen		7,8119
Eisen in Stangen (Stabeisen)		7,7880
Zinn, ungehämmert		7,2914
Gußeisen		7,2070
Zink, ungehämmert		6,861

Spießglanz, ungehämmert	6,712
Tellurmetall	6,115
Chromium	5,900
Jode	4,9480
Schwerſpath	4,4300
Zirkon von Zeilon	4,4161
Rubin, orientaliſcher	4,2833
Saphir, orient.	3,9941
Saphir, braſilian.	3,1307
Topas, orient.	4,0106
= ſächſiſcher	3,5640
Beril, orient.	3,5489
Diamant, ſchwerſter (leicht roſenroth)	3,5310
= leichteſter	3,5010
Flintglas, engliſches	3,3293
Flußſpath (rother)	3,1911
Türmalin (grüner)	3,1555
Asbeſt (ſtrahlender)	2,9958
Marmor von Paros (kohlenſaurer blättriger Kalk)	2,8376
Sardonix	2,8160
Smaragd	2,7755
Perlen	2,7500
Kalk (kohlenſaurer kryſtalliſirter)	2,7182
Jaſpis	2,7101
Korallen	2,680
Bergkryſtall	2,6530
Quarzachat	2,6 5
Feldſpath (durchſichtiger)	2,5644
Glas von St. Gobain	2 4882
Porcelain, chineſiſches	2,3847
Kalk, ſchwefelſaurer kryſtalliſirter	2,3117
Porcelain von Sèvres	2,1457
Schwefel, gediegener	2,0332
Elfenbein	1,9170
Alabaſter	1,8740

Anthracit	1,8000
Alaun	1,720
Steinkohle, compakte	1,3292
Gagath	1,259
Bernstein	1,078
Eichenholz	1,1700
Natrium	0,9726
Eis	0,930
Potasche	0,8651
Buchenholz	0,852
Eschenholz	0,845
Taxusholz	0,807
Ulmenholz	0,800
Apfelholz	0,733
Orangenholz	0,705
Tannenholz, weißes	0,657
Lindenholz	0,604
Zypressenholz	0,598
Zedernholz	0,561
Tannenholz	0,550
Pappelholz, weißes, spanisches	0,529
Sassafrasholz	0,482
Pappelholz, gewöhnliches	0,383
Korkholz	0,240

§. 219.

VII. Tafel. Specifische Gewichte der elastischen Flüssigkeiten

wobei das Gewicht der atmosphärischen Luft zur Einheit angenommen ist.

Atmosphärische Luft	1,0000
Jodedampf	8,6195
Chlor	2,470
Chloroxyd	2,417

Cyan	1,8064
Dampf von abſolutem Alkohol	1,6133
Stickſtoffgas, oxydirtes	1,527
Kohlenſäure	1,524
Chlorwaſſerſtoffſäure	1,2474
Schwefelwaſſerſtoffſäure	1,1912
Sauerſtoffgas	1,1036
Salpetergas	1,0392
Oelbildendes Gas	0,9780
Stickſtoffgas	0,9760
Kohlenoxydgas	0,9569
Dampf von Blauſäure	0,9476
Waſſerdampf	0,6235
Ammoniakgas	0,5912
Kohlenwaſſerſtoffgas	0,555
Waſſerſtoffgas	0,0688

§. 220.

VIII. Tafel. Specifiſche Gewichte

der tropfbaren Flüſſigkeiten, wobei das Gewicht des Waſſers als Einheit gilt.

Schwefelſäure	1,8409
Salpeterſäure, rauchende	1,550
Scheidewaſſer	1,2175
Meerwaſſer	1,0263
Milch	1,0300
Waſſer, deſtillirtes	1,0000
Olivenöl	0,9153
Salzäther	0,874
Terpintineſſenz	0,8697
Bergnaphta	0,8475
Alkohol, abſoluter	0,792
Schwefel-Aether	0,7155

Zur Verbindung vorstehender Tafeln der specifischen Gewichte, diene die Bemerkung, daß, nach den Untersuchungen der Herren Biot und Arago, das Gewicht eines Volumen trockner, atmosphärischer Luft, zu einem gleichen Volumen destillirten Wassers, sich verhalte = 1 : 770, bei der Barometerhöhe von 0,^{m} 76 (Mètres) und der Temperatur des schmelzenden Eises.

Aus einer großen Anzahl von Versuchen, ergiebt sich, bei 0° Temperatur, und unter dem Luftdruck von 0,^{m} 76 das Verhältniß des Gewichtes der Luft zum Quecksilber = 1 : 10466.

Der Pariser Cubikfuß destillirtes Wasser wiegt in der Luft bei 10° Reaum. = 69 ℔ 14 Unzen Par. poids de marc; demnach ein Württ. Kub. Fuß Wasser unter gleichen Umständen = 49,068 ℔ oder 49 ℔ 2 Loth 0,$_{7}$ Quentchen Württemberger- oder Kölner-Gewicht.

§. 221.

IX. Tafel. Linear-Ausdehnungen

einiger Stoffe, von der Temperatur des schmelzenden Eises an, bis zum Siedepunkte des Wassers, nach den Versuchen der Herren Laplace und Lavoisier.

Benennung der Stoffe	Ausdehnungen	
	in Dezimaltheilen der Längen	in gewöhnlichen Brüchen; die Länge = 1.
Stahl, ungehärteter	0,0010791	$\frac{1}{926}$
Kapell-Silber	0,0019097	$\frac{1}{523}$
Kupfer	0,0017173	$\frac{1}{582}$
Messing	0,0018782	$\frac{1}{530}$
Zinn, englisches	0,0021730	$\frac{1}{460}$
Schmiedeisen, geschmeidiges . .	0,0012205	$\frac{1}{819}$

Benennung der Stoffe	Ausdehnungen in Dezimaltheilen der Längen	in gewöhnlichen Brüchen; die Länge = 1.
Eisendraht	0,0012350	$\frac{1}{811}$
Flintglas, englisches . . .	0,0008117	$\frac{1}{1248}$
Gold, durch die Quart geschieden .	0,0014661	$\frac{1}{682}$
Gold, 20karatig . . .	0,0015515	$\frac{1}{645}$
Platina	0,0008565	$\frac{1}{1167}$
Blei	0,0028484	$\frac{1}{356}$
Glas von St. Gobain . . .	0,0008909	$\frac{1}{1122}$
Queckſilber, dehnt ſein Volumen von 0° bis zur Temperatur des kochenden Waſſers aus, um . .	0,018018 =	$\frac{100}{5550}$
Waſſer, um	0,0433 =	$\frac{1}{23}$
Alkohol, um	0,1100 =	$\frac{1}{9}$
Alle Gasarten	0,375 =	$\frac{100}{267}$

Die Ausdehnungen bei den, zwiſchen 0° und 100° der Celſius'ſchen Thermometer-Skale, oder zwiſchen 0° und 80° der Reaumure'ſchen Skale, fallenden Temperaturen, ſtehen in dem gleichen Verhältniſſe zu den angegebenen Werthen, wie der betreffende Temperaturgrad zum Grade des kochenden Waſſers.

§. 222.

Verhältniſſe des Geldes.

Die Ausprägung der Münzen geſchieht in den Metallen: Platina, Gold, Silber und Kupfer. Weil Gold und Silber ſehr weiche Metalle ſind, ſo wird ihnen der Haltbarkeit wegen ein anderes Metall, erſterem entweder Silber oder Kupfer, und letzterem ausſchließlich Kupfer beigemiſcht. Dieſe Beimiſchung heißt man Legirung und wird beim Abſchätzen des wahren Werthes der eigentlichen Gold- und Sil-

bermünzen nicht in Anschlag gebracht. Das reine Gold und Silber in den Münzen wird: Korn oder Feingehalt, und das vermischte Metall: Schrot oder Rauhes genannt. Das Verhältniß des Korns zum Schrot, welches entweder nach Luftgewicht, oder dem Raume bestimmt wird, ist beinahe auf allen Münzstätten verschieden. Der Gehalt einer Münze, oder ihr wahrer Werth, hängt aber lediglich von diesem Verhältnisse ab, und muß solches zur Bestimmung desselben aus dem Luftgewichte des Schrotes, bekannt seyn. Diese Verhältnisse sind nun mit dem Gewichte, der in Umlauf sich befindlichen Münzstücke in folgender Tafel zusammengestellt.

Weil Frankreich die einfachste Münzordnung hat, so wurden auf ihre Gesetze hin, die Zahlen der Werthe gebracht.

In Frankreich ist der Franc als Münzeinheit angenommen. Das Korn verhält sich zum Schrot, bei Gold- und Silbermünzen = 9 : 10, oder zu 9 Theilen Feingehalt, kommt jederzeit 1 Theil Legirung, so daß das Schrot, oder Rauhe = 10 Theile ist. Nimmt man daher das Schrot einer französischen Münze zu 1 an, so beträgt das Korn = $0{,}_{900}$ Theile des Ganzen. In der zweiten Spalte der Tafel nach den Namen, sind die Dezimaltheile des Feingehaltes enthalten, welche bei jedem Münzstück mit seiner Legirung = 1 Rauhes ausmachen. Man könnte sich auch eine Münze in 1000 Theile zerlegt denken, und diese Dezimalen als ganze Zahlen ansehen. In der ersten Rubrik der Werthe steht das physische Gewicht der Münzen in französischen Grammes, und in der dritten ihr Werth nach franz. Francs.

In Frankreich verhält sich gegenwärtig der Werth des Goldes zum Werth des Silbers = $15{,}_5$: 1.

X. Tafel.

Vergleichung der coursirenden Gold- und Silber-Münzstücke mit den französischen Münzen, und Angabe ihrer physischen Gewichte, so wie ihres Feingehalts, nach den bestehenden Münzordnungen.

(1 Franc = 100 Centimes.)

Metall	Benennung der Münzstücke	Gesetzliches Gewicht in Gramm.	Feingeh. in Dezimalth.	Werth in Francs und Centimen
	England.			
Gold	1 Guinée von 21 Schilling	8,3802	917	26 F. 47 C.
	$\frac{1}{2}$ = ...	4,1901	917	13 — 23,50
	$\frac{1}{4}$ = ...	2,095	917	6 — 61,75
	$\frac{1}{3}$ = oder 7 Schilling	2,7934	917	8 — 82,33
	1 Souverain seit 1818, von 20 Schilling . . .	7,9808	917	25 — 20,80
Silber	1 Crown oder Krone von 5 alten Schillingen . .	30,074	925	6 — 16
	1 alter Schilling . .	6,015	925	1 — 23,60
	1 Crown od. Krone seit 1818	28,2514	925	5 — 80,72
	1 Schilling seit 1818 . .	5,6503	925	1 — 16,14
	Oestreich und Böhmen.			
Gold	1 Kaiser-Dukaten . .	3,491	986	11 — 86
	1 Ungar. = . . .	3,491	990	11 — 90
	$\frac{1}{2}$ Souverain . . .	5,567	917	17 — 58
	$\frac{1}{4}$ = . . .	2,7834	917	8 — 79
Silber	1 Conventions- oder Reichsthaler, seit 1753 . .	28,064	833	5 — 19,50
	$\frac{1}{2}$ Thlr. od. 1 Guldenstück .	14,032	833	2 — 59,75
	1 20kr. Stück . . .	6,682	583	0 — 86, 50
	1 10kr. Stück . . .	3,898	500	0 — 43,25
	Baden.			
Gold	1 Zehnguldenstück . .	6,800	901	21 — 04
Silber	1 Fünfguldenstück . .	3,400	901	10 — 52
	1 Zweiguldenstück . .	25,450	750	4 — 18
	1 Guldenstück . . .	12,725	750	2 — 09

Metall	Benennung der Münzstücke.	Gesetzliches Gewicht in Gramm.	Feingeh. in Dezimalth.	Werth in Francs und Centimes
	Baiern.			
Gold	1 Carolin	9,744	771	25 F. 66 C.
	1 Maximiliansd'or . .	6,496	771	17 — 18
Silber	1 Kronenthaler . . .	29,343	868	5 — 66
	1 Reichsthaler seit 1800 .	27,513	833	5 — 10
	1 Kopfstück	6,643	583	0 — 86
	Dänemark u. Holstein.			
Gold	1 Dukat seit 1767 in Umlauf	3,143	875	9 — 47
	1 Species-Dukat von 1791 bis 1802 . . .	3,519	979	11 — 86
	1 Christiansd'or, 1775 .	6,735	903	20 — 95
Silber	1 gemünzter Reichsthaler od. Doppelthaler von 96 dänischen Schillingen v. 1776.	29,126	875	5 — 66
	1 Reichsthaler oder 1 Stück von 6 dänischen Marko von 1750	26,800	833	4 — 96
	1 dänische Marko v. 16 Schilling von 1776 . .	—	688	—
	Spanien.			
Gold	1 Pistole oder Dublone von 8 Thlr. 1772 bis 1786 .	27,045	901	83 — 93
	1 Pistole von 4 Thlr. . .	13,5225	901	41 — 96,50
	1 = von 2 = . .	6,7613	901	20 — 98,25
	½ = oder 1 Thaler .	3,3806	901	10 — 49,12
	1 = oder Doublone von 8 Thaler, seit 1786 . .	27,045	875	81 — 51
	1 Pistole von 4 Thlr. .	13,5225	875	40 — 75,50
	1 = von 2 Thlr. . .	6,7613	875	20 — 37,75
	½ = oder 1 Thlr. .	3,3806	875	10 — 18,87
Silber	1 Piaster seit 1772 . .	27,045	903	5 — 43
	1 Doppelréal, oder 1 Silberstück, oder ⅕ Piaster .	5,971	813	1 — 08

Metall	Benennung der Münzstücke.	Gesetzliches Gewicht in Gramm.	Feingeh. in Dezimalth.	Werth in Francs und Centimes
	Spanien. (Forts.)			
Silber	1 Réal, od. $\frac{1}{2}$ Silberstück od. $\frac{1}{10}$. Piaster . . .	2,9855	813	0 F. 54 C.
	1 Reallillo oder 1 Kupferréal, oder $\frac{1}{20}$. Piaster . (Die 3 letzten Stücke haben nur auf der Halbinsel Cours.)	1,4928	813	0 — 27
	Kirchenstaat.			
Gold	1 Pistole von Pius VI. u. VII.	5,471	$916\frac{2}{3}$	17 — 27,50
	$\frac{1}{2}$ = ...	2,7355	$916\frac{2}{3}$	8 — 63,75
	1 Zechine von 1769 von Clemens XIV. und seinen Nachfolgern . . .	3,426	1000	11 — 80
	$\frac{1}{2}$ Zechine von Clemens XIV.	1,713	1000	5 — 90
Silber	1 Scudo von 100 Bacchochi.	26,437	$916\frac{2}{3}$	5 — 38,50
	$\frac{3}{10}$. Scudo oder 1 Kopfstück von 30 Bajocchi . . .	7,932	$916\frac{2}{3}$	1 — 62
	$\frac{1}{5}$. Scudo, oder 1 Papeto von 20 Bajocchi . . .	5,287	$916\frac{2}{3}$	1 — 08
	$\frac{1}{10}$. Scudo, oder 1 Paul von 10 Bajocchi . . .	2,644	$916\frac{2}{3}$	0 — 54
Gold	10 Scudi-Stück von 1835 an	17,336	900	53 — 74,16
	5 = = von 1835 an	8,668	900	26 — 87,08
	$2\frac{1}{2}$ = = von 1835 .	4,334	900	13 — 43,54
Silber	1 Scudo von 1835 . .	26,898	900	5 — 37,96
	$\frac{1}{2}$ = von = . .	13,449	900	2 — 68,98
	$\frac{3}{10}$. = von = . .	8,0694	900	1 — 61,39
	$\frac{2}{10}$. = von = . .	5,3796	900	1 — 07,59
	$\frac{1}{10}$. = von = . .	2,6898	900	0 — 53,79
	Nordamerika.			
Gold	1 Doppel-Adler v. 10 Dollars	17,480	917	55 — 21
	1 Adler von 5 Dollars .	8,740	917	27 — 60,50
	$\frac{1}{2}$ Adler oder $2\frac{1}{2}$ Dollars .	4,370	917	13 — 80,25

Metall	Benennung der Münzstücke.	Gesetzliches Gewicht in Gramm.	Feingeh. in Dezimalth.	Werth in Francs und Centimes.
	Nordamerika. (Forts.)			
Silber	1 Dollar . . .	27,000	903	5 F. 42 C.
	½ = . . .	13,50 c	903	2 — 71
	¼ = . . .	6,75 °	903	1 — 55,50
	Hamburg.			
Gold	1 Dukat ad legem Imperii	3,491	986	11 — 86
	1 Dukate (neue Stadt-) .	3,488	979	11 — 76
Silber	1 Marc banco (Rechnungs-Münze) . . .	—	—	1 — 88
	1 Marc oder 16 Schilling, nach der Convention von Lübeck . . .	9,164	750	1 — 53
	1 Reichs- oder gemünzter Thaler . . .	29,233	889	5 — 78
	Japan.			
	(Durch Vergleichung, indem die gesetzlichen Bestimmungen über das Gewicht und den Feingehalt der Münzen nicht bekannt sind.)			
Gold	1 Kobang, alter v. 100 Mas	= =	"	51 — 24
	½ = von 50 Mas	= =	"	25 — 62
	1 = neuer v. 100 =	= =	"	32 — 69
	½ = von 50 =	= =	"	16 — 34,50
Silber	1 Tigo-gin, od. 40 Masstück	= =	"	14 — 40
	½ = = von 20 =	= =	"	7 — 20
	¼ = = von 10 =	= =	"	3 — 60
	⅛ = = von 5 =	= =	"	1 — 80
	Venet. Lombardey.			
Gold	1 Souverain seit 1823 .	11,333	900	35 — 13
	½ = oder 20 östreich. Livres . . .	5,666	900	17 — 56

Metall	Benennung der Münzstücke.	Gesetzliches Gewicht in Gramm.	Feingeh. in Dezimalth.	Werth in Francs und Centimes.
	Venet. Lombardey. (Fortsetzung.)			
Silber	1 Thaler von 6 östr. Liv.	25,986	900	5 F. 20 C.
	½ = oder 1 Gulden .	12,993	900	2 — 60
	1 östreich. Livre . .	4,331	900	0 — 86,6
	Mongolei. (Durch Schätzung.)			
Gold	1 Mongol. Rupie . .	= =	"	38 — 72
	½ = = . .	= =	"	19 — 36
	¼ = = . .	= =	"	9 — 68
	1 Pagode mit dem Halbmonde	= =	"	9 — 46
	1 = mit dem Sterne	= =	"	9 — 35
	1 Dukat der holl. Compagnie	= =	"	11 — 62
	½ = = = =	= =	"	5 — 81
Silber	1 Mongolische Rupie .	= =	"	2 — 42
	1 Rupie von Madras .	= =	"	2 — 40
	1 = = Arkat . .	= =	"	2 — 36
	1 = = Pondicheri .	= =	"	2 — 42
	1 indischer Doppel-Fano .	= =	"	0 — 63
	1 = Fano . .	= =	"	0 — 31,50
	1 Silberstück der holländischen Compagnie . . .	= =	"	2 — 40
	Neapel.			
Gold	(Das Korn der Dukati ist zu veränderlich, als daß man eine Vergleichung mit den französischen Münzen anstellen könnte.)			
	1 neue Unze von 3 Dukati seit 1818. . . .	3,786	996	12 — 99
	5 Unzen von 15 Dukati, seit 1818	18,933	996	64 — 95

Metall	Benennung der Münzstücke.	Gesetzliches Gewicht in Gramm.	Feingeh. in Dezimaltheilen.	Werth in Francs und Centimes
	Neapel. (Forts.)			
Gold	10 Unzen von 30 Dukati seit 1818	37,865	996	129 F. 90 C.
Silber	12 Carolin von 120 Grains seit 1804 . . .	27,533	833⅓	5 — 10
	1 Dukato von 10 Carolins von 100 Grains, seit 1784	22,810	839½	4 — 25
	2 Carolin, seit 1804 . . .	4,589	833⅓	0 — 85
	1 Carolin, seit 1804 . .	2,2945	833⅓	0 — 42,5
	1 Dukato von 10 Carolin, von 1818	22,943	833⅓	4 — 25
	Parma.			
Gold	1 Zechine . . .	3,468	1000	11 — 05
	1 Pistole von 1784 . .	7,498	891	23 — 01
	1 Pistole von 1786 bis 1791	7,141	891	21 — 91,56
	40 Lires von Marie Louise, seit 1815 . . .	12,9032	900	40 —
	20 Lires v. M. L. seit 1815	6,4516	900	20 —
Silber	1 Dukat v. 1784 und 1796.	25,707	906	5 — 18
	1 3 Livresstück, seit 1790 .	3,672	833	0 — 68
	1 Livres à 10 Sols, seit 1790	1,836	833	0 — 34
	5 Lires von M. L. seit 1815	25,000	900	5 =
	2 Lires, 1 Lira, ½, ¼ Lirastück, stehen ganz im Verhältniß.			
	Holland.			
Gold	10 Guldenstück . . .	6,729	900	20,8599
	5 Guldenstück . . .	3,3645	900	10,4299
Silber	1/10 Guldenstück à 5 Cents	0,846	569	0,1068
	1/10 = oder 10 Cents.	1,692	569	0,2136
	¼ = = 25 =	4,230	569	0,534
	½ = = 50 =	5,383	893	1 — 06,81
	1 = = 100 =	10,766	893	2 — 13,62
	3 = . . .	32,298	893	6 — 40,86

Metall	Benennung der Münzstücke.	Gesetzliches Gewicht in Gramm.	Feingeh. in Dezimalth.	Werth in Francs und Centimes
	Persien. (Vergleichsweise.)			
Gold	1 Rupie . . .	= =	"	36 F. 75 C.
	$\frac{1}{2}$ = . . .	= =	"	18 — 37,50
Silber	1 Doppel Rupie von 5 Abassis	= =	"	4 — 90
	1 Rupie von $2\frac{1}{2}$ Abassis .	= =	"	2 — 45
	1 Abassi . . .	= =	"	0 — 97
	1 Mamudi . . .	= =	"	0 — 48,50
	1 Larin . . .	= =	"	1 — 03
	Portugal.			
Gold	1 Lissaboner Moeda d'ouro von 4800 Reis . .	10,752	917	33 — 96
	$\frac{1}{2}$ Lissaboner M. d. oder 1 Meia moeda von 2400 Reis	5,376	917	16 — 98
	$\frac{1}{4}$ Lissab. M. d. oder 1 Quartino von 1200 Reis .	2,688	917	8 — 49
	1 Portugiesischer Meia dobra von 6400 Reis . .	14,334	917	45 — 27
	$\frac{1}{2}$ Portug. M. d. von 3200 Reis	7,167	917	22 — 63,50
	16 Kopfstück zu 1600 Reis	3,583	917	11 — 31,75
	12 Kopfstück zu 1200 =	2,538	917	8 — 02
	8 = = 800 =	1,792	917	5 — 66
	1 Crusade von 480 =	1,045	917	3 — 30
Silber	1 neue Crusade v. 480 =	14,633	903	2 — 94
	1,000 Reis . . .	= =	"	6 — 12,5
	Preußen.			
Gold	1 Dukaten . . .	3,491	979	11 — 77
	1 Friedrichsd'or . .	6,689	903	20 — 80
	$\frac{1}{2}$ = . .	3,3445	903	10 — 40
Silber	1 Reichsthaler, oder Thaler von 30 Silbergroschen von 1823	22,272	750	3 — 71,11

Metall	Benennung der Münzstücke.	Gesetzliches Gewicht in Gramm.	Feingeh. in Dezimalth.	Werth in Francs und Centimes.
	Preußen. (Forts.)			
Silber	$\frac{1}{6}$ Thlr. von 5 Silbergroschen	3,712	750	0 — 61,85
	1 Silbergr. wahrer Werth	2,192	208	0 — 10
	Ragusa.			
Gold	Keines.			
Silber	Thaler, genannt Ragusaner	29,400	600	3 — 90
	$\frac{1}{2}$ = =	14,700	600	1 — 95
	1 Dukat . . .	13,666	450	1 — 37
	12 Groschenstück . .	4,110	450	0 — 41
	6 Groschenstück . .	2,070	450	0 — 20,50
	Rußland.			
Gold	1 Dukat von 1755 bis 1763	3,495	979	11 — 79
	1 = = 1763 . .	3,473	969	11 — 59
	1 Impériale von 10 Rubel, von 1755 bis 1763 . .	16,585	947	52 — 38
	$\frac{1}{2}$ Imp. von 5 Rubel, von 1755 bis 1763 . .	8,2925	917	26 — 19
	1 Imp. zu 10 Rubel seit 1763	13,073	917	41 — 29
	$\frac{1}{2}$ Imp. zu 5 — seit 1763	6,5365	917	20 — 64,50
Silber	1 Rubel zu 100 Kopeken, von 1750 bis 1762 . .	25,870	802	4 — 61
	1 Rubel zu 100 Kopeken, seit 1763 bis 1807 . .	24,671	750	4 — 0
	Sardinien.			
Gold	1 Carolin, seit 1768 . .	16,056	892	49 — 33
	$\frac{1}{2}$ = ...	8,028	892	24 — 66,50
	1 Pistole	9,118	906	28 — 45
	$\frac{1}{2}$ = ...	4,559	906	14 — 22,50
Silber	1 Thaler seit 1768 . .	35,590	896	4 — 70
	$\frac{1}{2}$ = ...	17,795	896	2 — 55
	$\frac{1}{4}$ = oder 1 Livre .	8,8975	896	1 — 47,50
	1 neuer Thlr. v. 5 Livres, 1816	25,000	900	5 — 0

Metall	Benennung der Münzstücke	Gesetzliches Gewicht in Gramm.	Feingeh. in Dezimaltheilen.	Werth in Francs und Centimen
	Savoyen und Piemont.			
Gold	1 Zechine . . .	3,468	1000	11 F. 95 C.
	1 neue Doppelpistole von 24 Livres . . .	9,620	906	30 — 0
	½ neue Doppelpistole von 12 Livres . . .	4,810	906	15 — 0
	1 Carolin, seit 1755 . .	48,100	906	150 — 0
	½ = . . .	24,050	906	75 — 0
	1 neue Pistole von 20 Livres seit 1816 . . .	6,4516	900	20 — 0
Silber	1 Thaler von 6 Livres, seit 1755 . . .	35,118	906	7 — 07
	½ Thaler v. 3 Liv. seit 1755	17,559	906	3 — 53,50
	¼ = oder 30 Sous .	8,7795	906	1 — 76,75
	⅛ Viertel oder 15 Sous .	4,3897	906	0 — 88,37
	1 neuer Thaler von 5 Livres, 1816 . . .	25 "	900	5 — 0
Gold	1 genuesische Zechine . .	3,487	1000	12 — 04
	Sachsen.			
Gold	1 Dukat . . .	3,491	986	11 — 86
	1 doppel Augustd'or, oder 10 Thlr. . . .	13,340	903	41 — 40
	1 Augustd'or oder 5 Thlr.	6,670	903	20 — 74,50
	½ Augustd'or . .	3,335	903	10 — 37,25
Silber	1 Münzthaler, oder Conventionsstück seit 1763 .	28,064	833	5 — 49,50
	½ Reichsthaler oder 1 Conventionsgulden . .	14,032	833	2 — 59,75
	1 Thaler von 24 guten Groschen (Rechnungs-Münze)	= =	"	3 — 89,63
	1 Groschen, wovon 32 auf einen Reichsthaler und 24 auf einen Thaler gehen	1,982	368	0 — 16,21

Metall.	Benennung der Münzstücke.	Gesetzliches Gew. in Gramm.	Feingeh. in Dezimalth.	Werth in Francs und Centimes.
	Sicilien.			F. C.
Gold	1 Unze, seit 1748 . . .	4,399	906	13 — 73
Silber	1 Thaler von 12 Tarins .	27,533	833⅓	5 — 10
	Schweden.			
Gold	1 Dukaten	3,482	976	11 — 70
	½ = ...	1,741	976	5 — 85
	¼ = ...	0,8705	976	2 — 92,50
Silber	1 Reichsthaler zu 48 Schilling gemünzt, von 1720 bis 1802	29,508	878	5 — 75,73
	Ein ⅔ Reichsthlr. oder 1 Doppel-Plotte v. 32 Schilling	19,672	878	3 — 83,82
	Ein ⅓ Reichsthaler oder 16 Schilling	9,836	878	1 — 91,91
	Schweiz.			
Gold	Ein 32 Schweizer Frankstück.	15,297	904	47 — 63
	= 16 = =	7,6485	904	23—81,59
	1 Züricher Dukaten . .	3,491	979	11—77
	1 Berner = . .	3,452	979	11—64
	1 Berner Pistole . .	7,648	902	23—76
Silber	1 Basler Thaler zu 30 Batzen oder 2 Gulden .	23,386	878	4—56
	½ Thlr. oder 1 Guld. v. 15 Batz.	11,693	878	2 28
	1 Berner franc seit 1803.	7,512	900	1—50
	1 Zürcher Thaler v. 1781.	25,057	844	4—70
	½ = = = =	12,5285	844	2—55
	Ein 40 Batzenthaler von Basel und Solothurn, seit 1798.	29,489	901	5—90
	Ein Berner 4 Franken-Stück v. 1799 . . .	29,370	901	5—88

Metall.	Benennung der Münzstücke.	Gesetzliches Gew. in Gramm.	Feingeh. in Dezimalth.	Werth in Francs und Centimes.
	Schweiz. (Forts.)			F. C.
Silber	Ein 4 Schweizer Frankenstück vom Jahr 1803 . .	30,049	900	6—0
	1 Schweizerfrank v. 1803.	7,5123	900	1—50
	Toskana.			
Gold	1 Ruspone, oder 3 Zechinen mit Lilien . . .	10,464	1000	36—04
	$\frac{1}{3}$ Ruspone, oder 1 Lilien Zech.	3,488	1000	12—01,33
	$\frac{1}{2}$ Zechine . . .	1,744	1000	6—00,67
	1 Zechine mit Brustbild .	3,488	1000	12—01,33
	1 Rossine	6,976	896	21—54
	$\frac{1}{2}$ = ...	3,488	896	10—77
Silber	1 Franzstück von 10 Paulst.	27,507	917	5—61
	1 Stück von 5 Paul .	13,7535	917	2—80,50
	1 = = 2 = . .	5,501	917	1—12,20
	1 = = 1 = . .	2,751	917	0—56,10
	Türkei.			
Gold	1 Zermahbub-Zechine, von SultanAbdul-Hamet,1774,	2,642	958	8—72
	1 Nissie, oder $\frac{1}{2}$ Zermahbub, von demselben, 1774 .	1,321	958	4—36
	1 Rupie oder $\frac{1}{4}$ Fondukli Zechine . . .	0,881	802	3—47,34
	1 Zermahbub-Zechine von Selim III. . . .	2,642	802	7—30
	$\frac{1}{2}$ Zermahbub-Zechine .	1,321	802	3—65
	$\frac{1}{4}$ = = .	0,661	802	1—82,50
Silber	1 Altmichlek von 60 Para seit 1771	28,822	550	3—52

Metall	Benennung der Münzstücke.	Gesetzliches Gew. in Gramm.	Feingeh. in Dezimalth.	Werth in Francs und Centimes.
	Türkei. (Forts.)			F. C.
Silber	1 Yaremlek von 20 Para oder 60 Asper, seit 1757 . .	= =	"	0—99
	1 Rupie von 10 Para oder 30 Asper von 1757 .	= =	"	0—49,50
	1 Para von 3 Asper, 1773.	= =	"	0—04
	1 Asper, deren 120 auf einen Piaster von 1773 gehen.	= =	"	0—01,3
	1 Piaster zu 40 Para oder 120 Asper, von 1780 .	18,015	500	2—0
	Ein 5 Piasterstück von Mahmud im J. 1811 . .	= =	"	4—13,67
	Belgien.			
Gold	1 Zwanzig-Franks-Stück.	6,45161	900	20—00
	1 Vierzig = =	12,9032	900	40—00
Silber	$\frac{1}{4}$ Frank = =	1,25	900	0—25
	$\frac{1}{2}$ = =	2,50	900	0—50
	1 = =	5,00	900	1—00
	2 = =	10,00	900	2—00
	5 = =	25,00	900	5—00
	(Nach dem Gesetz von 1832) Man hat bis jetzt nur 5 Franksst. geschlagen. Die franz. und holländ. Münzen sind in Belgien sehr verbreitet.			

Die belgischen Münzstücke sind von dem gleichen Gewichte und Korn, wie die französischen, auch haben sie miteinander die Namen gemein. Die einzige Ausnahme besteht darin, daß es in Frankreich wirklich Goldmünzen von 40 Franks giebt, welche 12,90322 Grammes schwer sind.

Die Regierung des Kirchenstaats hat im Jan. 1835 bei Einführung einer neuen Münzordnung folgende Valuationstabelle bekannt gemacht:

1 ungarischer Dukaten	=	2 Scudi	18 Bajocchi	
1 holländische "	=	2 "	16 "	
1 Schild-Louisd'or	=	4 "	60 "	
1 Louisd'or (Carlin)	=	4 "	35 "	(statt 40)
1 Napoleonsd'or	=	3 "	71 "	(statt 75)
1 spanische Bezeten nach 1785 ausgeprägt	=	— "	96 "	
1 Conventionsthaler	=	— "	95 "	
1 Kronenthaler	=	1 "	4 "	
1 Laubthaler	=	1 "	6 "	
1 Fünffrankstück	=	— "	92 "	

Spanische Piaster (ganze und halbe) wie vorher.

In Rußland wird im Jahre 1835, laut Senatsbeschluß, der Silber-Rubel, zu 3 Rubel und 60 Kopeken, Reichsassignaten, gerechnet.

---

§. 223.

Höhen einiger Gebäude.

Die höchste Pyramide in Egypten	= 509,616	württb. Fuß
Der Thurm des Straßburger Münsters über dem Pflaster	= 495,654	" "
Der St. Stephansthurm in Wien	= 481,692	" "
Die Kuppel der Peterskirche in Rom über dem Platze	= 460,749	" "
Der Thurm von St. Michael in Hamburg	= 453,768	" "

Der Pfeil der Kirche zu Antwerpen	= 418,862	württb.	Fuß.
Der Thurm von St. Peter in Hamburg	= 415,372	=	=
= = = St. Paul in London	= 383,957	=	=
Der Dom zu Mailand über dem Platze	= 380,467	=	=
Der Thurm zu den Palmeseln in Bologna	= 373,486	=	=
Der Pfeil auf dem Invaliden-Hause in Paris über dem Pflaster	= 366,505	=	=
Die Spitze des Pantheons üb. d. Pfl.	= 275,751	=	=
Das Geländer von Notre-Dame dto.	= 230,374	=	=
Die Vendôme-Säule	= 150,092	=	=
Die Plate-forme des königl. Observat.	= 94,244	=	=
Der Mast eines französischen Kriegsschiffes von 120 Kanonen, über dem Kiel	= 254,8	=	=
Stiftsthurm, großer, in Stuttgart	= 208	=	=
= kleiner = =	= 202	=	=
St. Leonhardsthurm = =	= 179	=	=
Hospitalthurm = =	= 168	=	=
Rathhausthurm = =	= 100	=	=
Münsterthurm in Ulm	= 330	=	=

§. 224.

Höhen (über der Meeresfläche) der untersten Gränzen des immerwährenden Schnees unter verschiedenen Breiten-Graden.

Unter 0° der Breite, oder unter dem Aequator	= 16754,5	württb.	Fuß
Unter 20° der Breite	= 16056,4	=	=
Unter 45°	= 8900	=	=
Unter 65°	= 5235,8	=	=

§. 225.

Tafel über die Hauptbestandtheile des Sonnensystems.

Namen der Planeten.	Dauer der Umlaufszeit um die Sonne.	Mittlere Entfernung von der Sonne. Erdentfernung = 1.
Merkur	87,969 Tag	0,387
Venus	224,701 =	0,723
Die Erde	365,256 =	1,000
Mars	686,980 =	1,524
Vesta	1335,205 =	2,373
Juno	1590,998 =	2,667
Ceres	1681,539 =	2,767
Pallas	1681,709 =	2,768
Jupiter	4332,596 =	5,203
Saturn	10758,970 =	9,539
Uranus	30688,713 =	19,183

Planeten-Durchmesser, wobei der Erde = 1.	Körperlicher Inhalt, der Erde = 1.	Dauer der Umdrehungen um sich selbst.	Vergleichung der Körpermassen mit der Sonne = 1.
Die Sonne = 109,93	1328460	25, Tag 500	1
Merkur 0,39	0,1	1,000	1/2025810
Venus 0,97	0,9	0,973	1/401847
Die Erde . . . 1,00	1,0	0,997	1/354936
Mars 0,56	0,2	1,027	1/2680337
Jupiter 11,56	1470,2	0,414	1/1050,5
Saturn 9,61	887,3	0,428	1/3512
Uranus 4,26	77,5	. . . . .	1/17918
Der Mond . . 0,27	1/49	27,322	1/23090000

Trabanten des Jupiter.

Mittlere Entfernungen vom Planeten, wobei dessen Radius = 1 angenommen ist.		Dauer der Umlaufszeiten.	Körpergrößen der Trabanten; der Inhalt des Planeten = 1.
1ter Trabant . .	6,0485	1, Tag 7691	0,000017
2ter Trabant . .	9,6235	3,5512	0,000023
3ter Trabant . .	15,3502	7,1546	0,000088
4ter Trabant . .	26,9983	16,6888	0,000043

Trabanten des Saturn.

Mittlere Entfernungen vom Planeten, wobei dessen Radius = 1 angenommen ist.		Dauer der Umlaufszeiten.
1ter Trabant	3,35	0, Tag 943
2ter Trabant	4,30	1,370
3ter Trabant	5,28	1,888
4ter Trabant	6,82	2,739
5ter Trabant	9,52	4,517
6ter Trabant	22,08	15,945
7ter Trabant	64,36	79,330

Trabanten des Uranus.

Mittlere Entfernungen vom Planeten, wobei dessen Radius = 1 angenommen ist.		Dauer der Umlaufszeiten.
1ter Trabant	13,12	5, Tag 893
2ter Trabant	17,02	8,707
3ter Trabant	19,85	10,961
4ter Trabant	22,75	13,456
5ter Trabant	45,51	38,075
6ter Trabant	91,01	107,694

Zusätze.

Zu §. 3. In vielen Lehrbüchern der Arithmetik wird mit unnöthigem Zeitaufwand und vergeblicher Mühe versucht, aus dem Nichts das Element der Zahlen, die Einheit, herzuleiten. Wir begnügen uns anfänglich mit dem allgemeinen Begriff von Eins, welcher schon im Kinde sich entwickelt, und sind überzeugt, daß solcher für die später nöthigen Modificationen, durch die aufgestellten Rechnungsübungen bälder geläutert wird, als durch unzeitige allgemeine Betrachtungen möglich wäre; die nur dazu dienen können, den Anlauf des Schülers auf der Bahn der Größenlehre zu hemmen. Durch Uebung herangewachsene Kräfte werden sich eher versuchen dürfen, den Vorhang zu lüften.

Zu §. 14. So viele Ordnungen eine Ziffer hinter sich gegen die Einheit haben soll, eben so viele Nullen werden ihr auf dieser Seite angehängt, wenn es nicht der Fall ist, daß die gegebene Menge Einheiten auch Ziffern der niedern Ordnungen in Anspruch nimmt, wo sodann solche statt der Nullen gesetzt werden. Im Allgemeinen könnte man sich vor jeder Bezeichnung einer Zahl eine Reihe Nullen von der Rechten zur Linken denken und diese als die Stellen der verschiedenen Ordnungsziffern mit den in §. 16 zusammengestellten Namen ansehen. Jede Stelle nun, für welche in der Zahl keine Theile gegeben sind, bleibt unverändert mit der Null bezeichnet; die übrigen aber erhalten die entsprechenden Ordnungsziffern.

Zu §. 16. Hinsichtlich der Benennung größerer Zahlen kann man die Ordnungen noch auf verschiedene Arten, welche aber gänzlich auf das Dezimalsystem gestützt seyn müssen, miteinander verbinden; so kann Eintausend als Ein Zehnhundert, Einhunderttausend als Zehn Zehntausend, oder als Ein Tausend-Hundert oder als Einhundert Zehntausend u. s. f. beliebig benannt werden. Nach diesem kann man z. B. für 2800 sagen Achtundzwanzig Hundert, für 159000 Dreizehn Zehn- u.

Neun-Tausend ꝛc. Vorstehendes will nichts anderes heißen, als man kann jede Ziffer in einer beliebigen Ordnung, wenn für die übrigen Ordnungen Nullen angehängt sind, wieder als eine Einheitsziffer von besonderem Namen betrachten; als z. E.:

30000 kann beschrieben und ausgesprochen werden: 3 Zehntausend, oder 30 Tausend, oder 300 Hundert u. s. w., in welchen Formen man die Ziffern benannte Zahlen heißen dürfte.

Eine Null vor der höchsten Ziffer einer Zahl hat keinen Werth; weßhalb eine solche Verbindung nie gebraucht wird.

Zu §. 28. Die aus mehreren Ziffern zusammengesetzten Zahlen, welche addirt werden sollen, kann man anfänglich in die Werthe dieser Ziffern zerlegen, und auf diesem Wege den Zusammenhang der Addition verdeutlichen; z. B. wenn 6831 und 398 zu addiren sind, so ist:

6831 so viel als 6000 + 800 + 30 + 1, und
398 = = = . . . 300 + 90 + 8.

Man hat die gleichnamigen Theile untereinander gesetzt, weil nur Gleichartiges verglichen oder verbunden werden kann. Summirt man nun, bei den Einern angefangen, Gleiches, so erhält man nach und nach:

9 Einheiten,
12 Zehner, oder 2 Zehner und 1 Hunderter,
11 Hunderter, oder 1 Hunderter und 1 Tausender,
6 Tausend.

Das Gefundene mit Zahlen ausgedrückt:

9 Einheiten
20 =
100 =
100 =
1000 =
6000 =

7229 = der Summe, wenn man Gleichartiges zusammenzieht.

Zu §. 37. Man betrachtet die erste Ziffer der Zahl von der Rechten zur Linken, oder diejenige der niedersten Ordnung (weil 0 keine Ziffer ist) als Einheitsziffer, wodurch die niederste des Produkts von der gleichen Art, d. h. der gleichen Ordnung wird, in der dieselbe steht; daher man nur letzterem die nämliche Anzahl Nullen anhängen darf, welche dem Multiplicator zugehören, um es auf die Benennung der Einheiten zu bringen.

Zu §. 40. Kann auch heißen: Die Anzahl der Einheiten zu finden, um welche eine Zahl die andere übertrifft.

Zu §. 42. Die Glieder der Subtraction kann man zu näherer Erklärung, wie in dem Zus. zu §. 28 in ihre Theile zerfällen.

Zu §. 48. Die Auflösung des 2ten Beispiels ist mit decadischen Complementen folgende:

3490
78146
978

dec. Compl. = 55462 — 10 (nämlich 10 Zehntausend)
dec. = = 93187 — 10 ditto

231263 — 20 = 31263 der Summe.

Man hat zweimal von 10 Zehntausend abgezogen, daher 20 Zehntausend zu viel addirt, welche man nun in der Summe, durch Weglassung der 2 von der 6ten Ordnung, wieder schwinden läßt.

Um in der Anmerk. dieses §. nicht mißverstanden zu werden, seye hier weitläufiger erklärt: befindet sich vor der Ziffer des Minuends, welche kleiner ist als die gleichnamige des Subtrahends, eine Null, so kann natürlich von dieser keine Einheit entlehnt werden, sondern man muß eine solche von der nächst höhern Ziffer nehmen und als Zehner an die Stelle der 0 bringen. Von diesem entlehnten Zehner denkt man sich nun wieder eine Einheit weggenommen, zur Aus-

hülfe für die betrachtete Ziffer, die nun auf solche Art um Zehn ihrer Einheiten verstärkt wird, wodurch in der Stelle der 0 nur noch ein Werth von 9 Einheiten ihrer Ordnung zurückbleibt.

Stehen mehrere Nullen vor einer Ziffer des Minuends, die kleiner als die gleichnamige des Subtrahends ist, so geht man über alle bis zur ersten Ziffer höherer Ordnung hinweg, nimmt von ihr 1, und bringt solches als 10 in die Stelle der nächsten Null abwärts; von diesem Zehn wird wieder 1 an die nächst niedere 0 als 10 und so fort, bis zur betreffenden Ziffer, abgegeben. Auf diese Weise haben nun sämmtliche Nullen den ihren Ordnungen entsprechenden Werth von 9 erhalten. Z. B. 140000268 — 864723, ist so viel als:

.....
140000268 — 864723 =
(1
139999268
864723

139135545 Rest.

Zu §. 49. Der Quotient kann nur so lange in dem pythagoräischen Rechentische gesucht werden, als der Divisor die Einheitszahl 9 nicht übersteigt.

Zu §. 54. Es wäre von Interesse, wenn Anfänger aus der Zerlegung des Divisors und Dividends in ihre einzelnen Theile den Quotienten herzuleiten begreifen würden; denn in solchem Falle wären viele Erklärungen überflüßig. Zur Figur des sich hierauf bezüglichen Verfahrens, welche hier folgt, und woran sich das Nachdenken üben kann, ist das Beispiel des nämlichen §. benützt worden.

$$
\begin{array}{l|l|l}
\text{Divisor} & \text{1ter Dividend} & \text{Quotienten} \\
 & & \text{1ter} \quad \text{2ter} \quad \text{3ter} \quad \text{4r} \\
30 + 6 & 60000 + 6000 + 300 + 80 + 4 & 1000 + 800 + 40 + 4 \\
 & 30000 + 6000 & \\
 & 30000 \quad = \quad (_1 & \\
 & 24000 + 6000 + \ 300 \ \ldots \text{ 2ter Dividend} & \\
 & 24000 + 4000 + \ 800 & \\
 & \quad 1000 + \ 500 & \\
 & \qquad 1500 + 80 \text{ 3ter Dividend} & \\
 & \qquad \left\{ \begin{array}{l} 200 + 40 \\ 1200 - \end{array} \right. & \\
 & \qquad 100 + 40 & \\
 & \qquad\quad 140 + 4, \text{ 4ter Dividend} & \\
 & \qquad\quad \left\{ \begin{array}{l} 20 + 4 \\ 120 \end{array} \right. & \\
 & \qquad\quad = \ = &
\end{array}
$$

In diesem Beispiel dienen die Nullen eigentlich nur zur Benennung der Ziffern, weßhalb man in keinen Irrthum verfallen darf, wenn bei der Subtraction im 2ten Dividend aus 6000 nicht 5999 + 1, sondern nur 5000 geworden ist; denn man hat ja nicht für eine Einheitszahl, sondern einen Zehner für Hunderter entlehnt.

Zu §. 63. Diejenigen Zahlen, welche nicht durch Multiplication anderer entstehen können, nennt man Primzahlen. In Beziehung auf ein solches Produkt heißen die Primzahlen einer zusammengesetzten Zahl ihre einfachen Faktoren.

Zu §. 64. Nro 3. Eine Zahl, welche in zwei andern aufgehet, ist auch in ihrer Differenz genau enthalten.

Zu §. 64. Nro. 4. Eine Zahl, welche in der Differenz zweier Zahlen und in einer dieser selbst aufgeht, muß auch in der andern genau aufgehen, oder ein Maaß von ihr seyn.

Zu §. 71. Die einfachste Erklärung für die Entstehung eines Bruches ist, sich die Einheit in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zerfällt zu denken. Solches auf die Division

einer Zahl durch eine andere angewendet, heißt nun: man stelle sich vor, ein Dividend seye durch den Divisor so oft abgemessen worden, als es möglich ist, und es bleibe ein Rest, welcher zu keiner ganzen Abmessung ausreicht, so wird es nothwendig, diesen Rest in so viele Theile zu zerfällen, daß die Anzahl solcher Theile ein Vielfaches des Divisors ist, und den neuen Quotienten, welcher einen kleinern Werth als 1 des ersten Quotienten haben muß, letzterem beizufügen. Nun ist es aber das Sicherste, jede Einheit des Restes sich in so viele Theile getheilt zu denken, als der Divisor Einheiten besitzt, wodurch die Zahl des Restes ein Produkt mit dem Divisor für die Summe der Einheitstheile wird; solche müssen aber in Zahlen abgetheilt werden, wovon jede so viel Einheitstheile als der Divisor Einheiten enthält, in sich faßt, oder die Summe muß durch den Divisor dividirt werden. Der daraus entstehende Quotient kann jedoch keine andere, als die ursprüngliche Zahl des Restes werden, nur daß man jetzt weiß, sie bedeute blos eine Zahl solcher Theile der Einheit, die entstehen, wenn man letztere mit dem Divisor theilt; also Bruchtheile des Divisors. Um solches anzuzeigen, wird demnach jederzeit der Divisor unter die Zahl des Restes gesetzt und und als Bruchwerth zu dem ganzen Quotienten addirt, wodurch dieser eine Zahl wird, die anzeigt, wie oft der Divisor ganz und wie oft theilweise in dem Dividend enthalten ist.

In der Abhandlung über die Brüche wird immer von der Ansicht ausgegangen, daß die Grundeinheit in eine gewisse Anzahl Theile zerlegt seye, und es Vielfache der entstehenden Bruchseinheit geben kann, bis zu dem Betrage der Theilungszahl selbst, wo sodann die Grundeinheit wieder erzeugt wird; oder die Grundeinheit seye um so viel mal verjüngt worden, als die Zahl des Nenners anzeigt; dehnt man diese verjüngte Einheit wieder um so viel mal aus, so entsteht die Grundeinheit wieder. Die Bruchtheile können wie ganze Zahlen behandelt werden, wenn sie der gleichen Einheit und der gleichen Theilung angehören.

Da es keine absolute Einheit giebt, so kann man für solche annehmen, was man will; also auch Größen, welche sonst Brucheinheiten wären. Nur in Verbindung mit andern Werthen, oder in deren Voraussetzung hat man auf die Form gebrochener Zahlen Rücksicht zu nehmen.

Bei den Rechnungsarten mit Brüchen oder Einheitstheilen gilt, wie immer, das Dezimalsystem.

Zu §. 79. Bruch einheit wird jederzeit ein einzelner Theil der gleichgetheilten Grundeinheit, genannt. Man wird leicht begreifen, daß es unendlich viele Brucheinheiten geben muß, abgesehen von dem eigenthümlichen Werthe der Grundeinheit; nämlich eben so viele als es ganze Zahlen giebt.

Zu §. 81. Bei der angeführten Vergleichung wird nur das Verfahren: in einem Divisions-Exempel aus dem Quotienten, Divisor und Rest den Dividenden wieder herzustellen, verstanden, und der Werth der Division, welcher in dem Quotienten enthalten ist, nicht in Betracht gezogen.

Schon vor der Entwicklung des Quotienten aus zwei Zahlen, wenn die Division in Bruchform angegeben ist, nennt man einen solchen Ausdruck, z. B. 688 dividirt durch 356 = $\frac{688}{356}$, den Werth oder den Quotienten der Division.

Zu §. 86. Entweder findet sich zwischen den Nennern mehrerer Brüche kein größtes gemeinschaftliches Maaß vor, in welchem Falle der gemeinschaftliche Nenner nur ein Produkt aus sämmtlichen Nennern seyn kann, oder es ist ein solches allen Nennern oder nur einigen gemeinschaftlich, bei welchen Umständen auf die in den gegebenen Beispielen angezeigte Art verfahren wird, um die durch sie ausmeßbare kleinste Zahl zu erhalten. Es werden diese Verwandlungen nur gebraucht, den kleinsten und somit auch den bequemsten Ausdruck für den Werth eines Bruches zu finden. In dem Formular für die gleiche Benennung sind die Quotienten 1 eigentlich überflüßig, sie wurden nur gesetzt, um die Aufhebung der Faktoren deutlich zu machen.

Zu §. 88. Den Werth des Bruches $\frac{631}{5879}$ findet man

durch allmählige Division eines Restes in den vorangegangenen Divisor =

$$\frac{1}{9+\frac{1}{5+\frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}$$

welche Figur ein Kettenbruch genannt wird.

Der vollständige Werth dieses Kettenbruches, so wie seine Näherungswerthe, entwickelt man nach der gegebenen Regel §. 88.

Zu §. 91. Bei der Multiplication einer Zahl, welche mehrere Brucheinheiten andeutet, d. h. eines Zählers, welcher größer als 1 ist, gilt das Nämliche, wie bei ganzen Zahlen; was an ihr vorgenommen werden soll, muß mit jeder ihrer Einheiten, aus welchen sie besteht, vorgenommen werden.

Soll eine Brucheinheit mit einer andern Brucheinheit multiplicirt werden, so heißt dieß, die eine soll um so viel mal verjüngt werden, als die andere anzeigt. Die Verjüngung oder Verkleinerung besteht aber in der Multiplication des Nenners, oder in der Vermehrung der Theilungszahl durch Multipliciren, daher die folgenden Schlüsse.

Zu §. 110. Unter Werth der Gleichung begreift man nichts anderes, als die beständige Gleichheit ihrer beiden Theile. Durch die angewendeten folgerechten Schlüsse kann man jedes Glied einer Gleichung allein darstellen, ohne daß jene Gleichheit oder der Werth der Voraunahme verloren geht.

Zu §. 116. In dem Ausdrucke $\frac{272\,x}{x}$ ist x als Gattungsname zu betrachten und deßhalb ohne Einfluß auf den Werth $\frac{272}{1} = 272$.

Zu §. 121. Man hat es für zweckmäßiger erachtet, sich hier nur mit der Uebersicht der arithmetischen Verhältnisse und Proportionen zu befassen, und ihre nähere Entwicklung und Anwendung in die §§. 194, 195, 196, 197, 198 und 199 zu verschieben.

Zu §. 145. Wird das erste und zweite Glied einer Proportion mit einerlei Zahl multiplicirt, so kann man annehmen, in dem ersten Gliede werde nur das Produkt mit dem zweiten Gliede gebildet §. 134; wobei der Exponent unverändert bleibt.

Zu §. 147. Nro. 1. Hier gilt die nämliche Ansicht, wie die so eben gegebene.

Zu §. 150. Diese Verhältnisse sind von großer Wichtigkeit, weil sich die Theorie und Berechnung der Logarithmen auf sie gründet. Nimmt man z. B. an, A seye die Einheit und B irgend eine Zahl, welche zur Basis des Logarithmischen Systems angenommen worden, so ist das Verhältniß A : B ein einfaches, oder der Logarithme für B = 1, während der von A = o ist. Für das Verhältniß A : D wäre der Logarithme 3fach größer, als der von A : B oder = 3.

Zu §. 171. Wenn, wie hier, von Reduktion eines kleinern Maaßes auf ein größeres Maaß die Rede ist, so hat man nur die Zahlen dieser Maaße, welche verkleinert werden, im Auge.

Zu §. 185 u. §. 186. In der Algebra werden derlei Aufgaben mittelst negativer Exponenten aufgelöst.

Zu §. 187. 11tes Beisp. Dergleichen gute Groschen gab es ehemals. Im 24 fl. Fuß wäre ihr Werth = 5½ kr. Gegenwärtig versteht man aber unter guten Groschen solche Münzwerthe, daß 24 Stücke auf einen Reichsthaler gehen, oder jedes = 4½ kr. rheinisch ist.

Zu §. 188. 13tes Beisp. Die einfachste Methode, eine Division auszuführen, wenn Divisor und Dividend aus verschiedenen Maaßtheilen zusammengesetzt sind, besteht darin, daß man zunächst gleichnamige Dezimalbrüche, nach Art der in

§. 192 und §. 193 dargestellten, bildet, und für die Auflösung in Anwendung bringt.

Zu §. 193. Wenn eine benannte Zahl durch einen Bruch dividirt werden soll, so findet das nämliche Verfahren, wie bei der Multiplication, Statt, wenn man vorher nach der Regel des §. 100 den Divisor in seinen Theilen verwechselt hat; z. B. eine Größe A dividirt durch $\frac{3}{17}$ ist so viel als A multiplicirt mit $\frac{17}{3}$.

Zu §. 201. Nro. 3. Ein Verhältniß heißt direkt oder gerade, wenn die Zahlen der Wirkungen in eben der Ordnung zu einander im Verhältnisse stehen, wie die Ursachen; z. B. wenn 1 ℔ 10 kr. kostet, so werden 8 ℔ 8 mal mehr kosten. Stehen aber die Wirkungen in entgegengesetzter Ordnung zu den Ursachen im Verhältniß, so heißt das eine ein umgekehrtes Verhältniß, z. B. wenn gefragt wird: wie viel braucht man Arbeiter, um ein Geschäft in 6 Tagen zu vollbringen, wenn 38 Arbeiter in 8 Tagen damit fertig werden, so kann man nicht sagen, je weniger Tag, desto weniger Arbeiter, sondern umgekehrt, je weniger Tag, desto mehr Arbeiter. Es geht dieses Verhältniß leicht aus dem gemeinschaftlichen Werthe, welches hier die Arbeit eines Mannes in einem Tage ist, hervor.

Zu §. 201. Nro. 35. Unter Einheit der Verhältnißwerthe muß hier die gleiche Größe verstanden werden, welches die Länge der deutschen Meile ist. In Beziehung auf die Zahlen der Verhältnisse aber stellt diejenige Länge, welche mit der deutschen Meile verglichen wird, die Einheit vor.

Zu §. 202. Wenn man allmählig den Kettenbruch nach den gewöhnlichen Regeln der Bruchrechnung auflöst, so wird erhalten:

$$1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\frac{17}{8}}} = 1+\cfrac{1}{7+\frac{8}{17}} = 1+\frac{1}{\frac{127}{17}} = 1+\frac{17}{127} = \frac{127+17}{127} = \frac{144}{127}$$

Das Verhältniß des Pariser-Fußes zum württembergischen.

Verzeichniß der Fehler,

welche bei den Correkturen überſehen wurden, und die vor dem Gebrauche zu berichtigen, der Leſer gebeten wird.

Seite 10 Zeile 5 von unten: ſtatt „unbedenkt" lies unbedeckt
„ 13 „ 10 von oben ſetze noch vor „Bezeichnet" Auflöſung.
„ 15 „ 2 v. unten ſtatt „Ziffer" l. Ziffern
„ 32 „ 16 v. oben ſt. „29,263" l. 31,263
„ 40 „ 13 v. unt. ſt. „demſelben" l. letzterem
„ 53 „ 15 von oben ſtatt an den Quotienten 4 und 8 ſoll an den Diviſoren 14 u. 17 ſtehen: G.G.M. von ꝛc.
„ 89 „ 3 v. unten ſt. „$\frac{2\times 7}{5\times}$" lies $\frac{2\times 7}{5\times 7}$
„ 128 „ 8 v. oben ſt. das 2te und 3te ſetze: das 2te u. 4te
„ 134 ſt. Seite 314 (pag.)
„ 136 Zeile 1 von unten ſt. „anzeigen" l. anzeigen
„ 137 „ 8 v. unt. ſt. „nach dem" l. nach den
„ 144 über b) durch Diviſion: ſetze §. 162.
„ 158 Zeile 23 von oben ſetze nach u. ſ. w.: bezeichnet
„ 159 „ 16 von oben ſt. 4) Geldgew. T. l. 4) Goldgew. T.
„ 167 „ 4 von oben ſtreiche: 1tes
„ 171 „ 16 v. oben ſtatt „6°□'45" ſetze: 6°□,4578
„ 182 „ 15 v. oben ſtatt „365—30 + 31 ſetze: 365—(30+31)
„ 201 „ 12 v. unten ſt. „§. 173" ſetze: §. 175.
„ 215 „ 2 von unten laſſe vor 2): „ſo iſt" weg
„ 220 „ 17 von oben ſtatt: „ſie um" l. ſie an
„ 228 „ 4 v. oben ſtatt: „§. 181" ſetze: §. 182
„ 230 „ 6 v. unten ſt. „20', = l. 20',
„ 233 „ 1 v. unten ſt. „1529''Cq. = ſetze: 1529''Cq.;
„ 237 „ 1 v. unten ſtatt: „ſolcher," ſetze ſolches
„ 238 „ 2 v. unten ſtatt: „Ausgenommen" l. Angenommen
„ 265 „ 1 v. oben ſtatt „3)" ſetze: 4)
„ 265 „ 16 v. oben ſtatt „4)" ſetze: 5)
„ 266 „ 14 v. unten ſtatt „5)" ſetze: 6)
„ 266 „ 4 v. unten ſtatt „6)" ſetze: 7)
„ 268 „ 2 v. oben ſtatt „7)" ſetze: 8)
„ 329 oben, ſetze über V. Tafel: §. 215.
„ 342 oben über VI. Tafel ſetze: §. 218.

LIBRARY
MAR 25 1976
UNIVERSITY OF TORONTO

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
101
H38
1835
c.1
PASC

008102713009